LKM * Grundwissen zur Koordinatenform von Ebenen im R^3

1. Wandle von der Parameterform in die Koordinatenform der Ebene um!

   a) $E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

   c) $E: \ \vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   d) $E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Wandle von der Koordinatenform in die Parameterform der Ebene um!

   a) $E: \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$

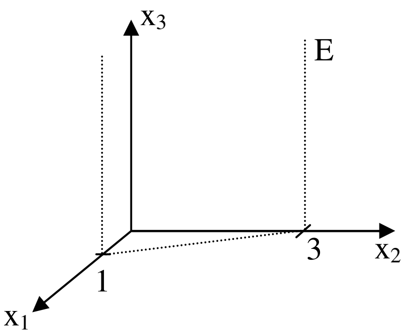
   b) $E: \ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$

   c) $E: \ 3x_1 + 4x_3 = 5$

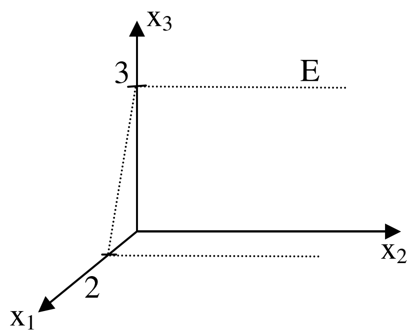
   c) $E: \ 2x_2 = 3$

3. Im Bild ist eine Ebene E dargestellt.
   Geben Sie E jeweils in Parameter- sowie in Koordinatenform an!

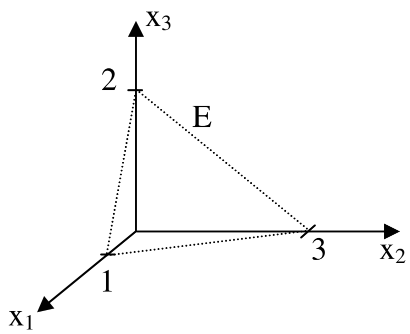
   a)



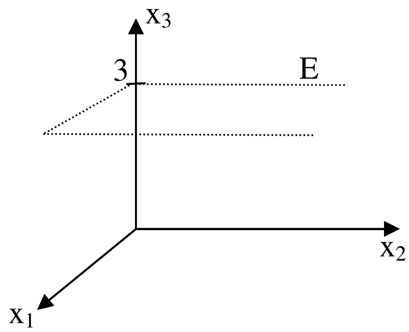
   b)



   c)



   d)



4. Geben Sie die Ebene jeweils in Parameter- sowie in Koordinatenform an!

   a) x_1x_2 – Ebene

   b) x_1x_3 – Ebene

5. Begründen Sie, dass es für eine Gerade im R^3 keine Koordinatenform geben kann.
   Erklären Sie, in welchem Raum es für Geraden eine Koordinatenform gibt.

Grundwissen zur Koordinatenform von Ebenen im R^3

Lösungen:

1. a) $E: -6x_1 + x_2 + 4x_3 - 6 = 0$
   b) $E: -4x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3 = 0$
   c) $E: 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
   d) $E: 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 7 = 0$

2. a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $E: \vec{X} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ d) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. a) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: 3x_1 + x_2 - 3 = 0$

   b) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: 3x_1 + 2x_3 - 6 = 0$

   c) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $E: \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$

   d) $E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E: x_3 - 3 = 0$

4. a) $E: x_3 = 0$ b) $E: x_2 = 0$

5. Koordinatenformen gibt es immer nur für Untervektorräume, deren Dimension um 1 kleiner ist als die Dimension des Vektorraums (so genannte Hyperebenen).
   Für Geraden gibt es deshalb eine Koordinatenform im R^2.
   Beispiel: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ d.h. $g: 5x_1 - x_2 - 7 = 0$ oder $x_2 = 5x_1 - 7$