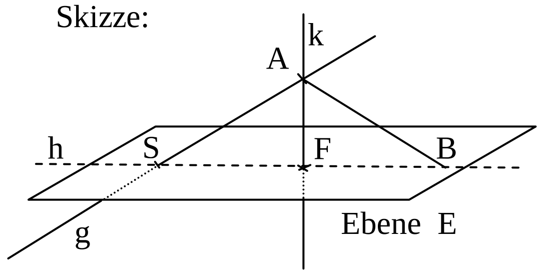
Lösungen zur Klausur im LK Mathematik, K13
Analytische Geometrie & Stochastik

1. a) g in E eingesetzt: $3\cdot(40-59\sigma)-4\cdot(-49+37\sigma)+9=0 \Leftrightarrow 325 = 325\sigma \Leftrightarrow \sigma=1$
$S = S(40-49/2+60/-49+37) = S(-19/62/-12)$

b) Normalenvektor von E: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Skizze:



$k: \vec{X} = \vec{A} + r\cdot\vec{n}_E$ mit E schneiden liefert den Punkt F(1/2/3).

$h: \vec{X} = \vec{S} + r\cdot\overrightarrow{SF}$ und $\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 20 \\ -60 \\ 15 \end{pmatrix}$

Der Aufpunkt F ist einfacher, deshalb $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} 59 \\ -60 \\ -37 \end{pmatrix}$

folgt $\cos\alpha = \dfrac{59\cdot4+(-60)\cdot(-12)+(-37)\cdot3}{\sqrt{59^2+60^2+37^2}\cdot\sqrt{4^2+12^2+3^2}} = \dfrac{845}{65\sqrt{2}\cdot13} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, also $\alpha = 45^\circ$.

c) $\vec{B} = \vec{F} + \overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -60 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -58 \\ 18 \end{pmatrix}$ also $B(21/-58/18)$

d) $\sphericalangle BSA = 45^\circ = \sphericalangle ABS$ (ΔSBA gleichschenklig) also $\sphericalangle SAB = 90^\circ$
Damit gilt $A_{\Delta SFB} = \overline{SF}\cdot\overline{FA} = \overline{SF}^2 = (\sqrt{20^2+60^2+15^2})^2 = 4225$

e) $V = \dfrac{1}{3}\cdot A_{\Delta SFB}\cdot h_{Pyramide} \Leftrightarrow \dfrac{65^3}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot 4225\cdot h_{Pyramide} \Leftrightarrow h_{Pyramide} = 65$
gesucht $\vec{r}$ mit $\vec{r}\perp\vec{n}_E$ und $\vec{r}\perp h \Rightarrow$ also $3r_1-4r_3=0$ und $4r_1-12r_2+3r_3=0$;

wähle z.B. $r_1=4 \Rightarrow r_3=3$ und $r_2=\dfrac{25}{12}$ d.h. $\vec{r}=\dfrac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 48 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix}$;

wegen $\left|12\cdot\vec{r}\right| = \sqrt{48^2+25^2+36^2} = 65 = h_{Pyramide}$ erhält man eine mögliche Spitze P

der Pyramide mit $\vec{P} = \vec{F} + 12\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 48 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 27 \\ 39 \end{pmatrix}$ also $P(49/27/39)$.

2\. a) Für $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{n}_{E_2} \perp \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_{E_2} \perp \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit

$E_2 : \quad \vec{n}_{E_2} \circ \left(\vec{X} - \vec{A} \right) = 0 \quad$ also $\quad x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 9 = 0$

b) Z.B. $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und daher

$$\cos\varphi = \left| \frac{\vec{n}_{E_1} \circ \vec{n}_{E_2}}{\left|\vec{n}_{E_1}\right| \cdot \left|\vec{n}_{E_2}\right|} \right| = \frac{58}{7 \cdot 9} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 22{,}9809...^{\circ} \approx 23{,}0^{\circ}$$

c) $d(M;E_1) = -3 \quad$ und $\quad d(M;E_2) = -3 \quad \Rightarrow$

$\frac{1}{7}(-2m_1 + 3m_2 - 6m_3 - 7) = -3 \quad$ und $\quad \frac{1}{9}(-m_1 - 4m_2 + 8m_3 - 9) = -3 \quad \Leftrightarrow$

$2m_1 - 3m_2 + 6m_3 = 14 \quad$ und $\quad m_1 + 4m_2 - 8m_3 = 18 \quad \Leftrightarrow$

$m_1 = 18 - 4m_2 + 8m_3 \quad$ und $\quad m_2 - 2m_3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m_3 \in R$ beliebig und

$m_2 = 2 + 2m_3 \quad$ und $\quad m_1 = 18 + 8m_3 - 8 - 8m_3 = 10$

also $\quad M(10 / 2 + 2m_3 / m_3)$ mit $m_3 \in R$

3\. a) $n = 500; \quad p = \frac{1}{25}; \quad \mu = E(X) = n \cdot p = 20 \; ; \; Var(X) = n \cdot p \cdot q = 19{,}2$

$$P(X = 15) = B(500; \frac{1}{25}; 15) \approx \frac{\mu^{15}}{15!} \cdot e^{-\mu} = \frac{20^{15}}{15!} \cdot e^{-20} = 0{,}0516488... \approx 5{,}2\%$$

b) $$P(14 < X < 23) = \phi\left(\frac{22 - 20 + 0{,}5}{\sqrt{19{,}2}} \right) - \phi\left(\frac{15 - 20 - 0{,}5}{\sqrt{19{,}2}} \right) \approx$$

$$\phi(0{,}57) - \phi(-1{,}26) = 0{,}71566 - (1 - 0{,}89617) \approx 61\%$$

c) $P(\left| \frac{X}{n} - p \right| \le 0{,}02) \ge 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad P(\left| X - np \right| \le 0{,}02 \cdot n) \ge 0{,}90 \quad$ also

$$2 \cdot \phi\left(\frac{0{,}02 \cdot n}{\sqrt{npq}} \right) - 1 \ge 0{,}90 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{0{,}02 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \right) \ge 0{,}95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0{,}02 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \ge 1{,}6449 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{n} \ge \frac{1{,}6449 \cdot \sqrt{\frac{1}{25} \cdot \frac{24}{25}}}{0{,}02} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \ge 16{,}116... \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 259{,}7... \quad \text{also} \quad n \ge 260$$