LK Mathematik * K13 * Logarithmus und Exponentialfunktionen

1. Gegeben ist die Schar reeller Funktionen $f_k: x \mapsto \dfrac{2k}{k \cdot e^x + 1}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

   a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_k und untersuchen Sie das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs.
   b) Untersuchen Sie f_k auf Monotonie und geben Sie die Wertemenge W_k an.

   [Zur Kontrolle: $f_k'(x) = \dfrac{-2k^2e^x}{\left(k \cdot e^x + 1\right)^2}$]

   c) Begründen Sie, dass f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ umkehrbar ist und ermitteln Sie $f_k^{-1}(x)$.

   [Zur Kontrolle: $f_k^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{2k - x}{kx}\right)$]

   d) Der Punkt $Q_k(k / - \ln k)$ ist Symmetriepunkt des Graphen von f_k^{-1}.
   Weisen Sie dies nach und geben Sie den Symmetriepunkt P_k des Graphen von f_k an.
   Die Symmetriepunkte P_k liegen auf einer Kurve c. Berechnen Sie deren Gleichung.

   (Quelle: Abi 1992 / I)

2. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x \cdot (1 - \ln x)^2$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

   a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f. [Zur Kontrolle: $f_k'(x) = (\ln x)^2 - 1$]
   b) Zeigen Sie, dass G_f genau einen Wendepunkt hat und dass die Wendetangente die Gleichung $y = 2 - x$ besitzt.
   c) Untersuchen Sie das Verhalten von $f(x)$ und $f'(x)$ für $x \to 0$ und $x \to \infty$.
   Geben Sie den Wertebereich W_f an.
   d) Berechnen Sie f(2) und f(4) auf 2 Dezimalen genau.
   Skizzieren Sie G_f im Bereich $0 < x \leqslant 4$. Tragen Sie auch die Wendetangente ein.
   e) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \dfrac{x^2}{2} \cdot \left[\dfrac{5}{2} - 3\ln x + (\ln x)^2\right]$ mit $x \in D_f$ eine Stammfunktion von f ist.
   f) Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das G_f, die Wendetangente und die x-Achse im Bereich $x \geqq 1$ begrenzen.

   (Quelle: Abi 1993 / II)

3. Die Ausbreitungsfläche einer Bakterienkultur wird näherungsweise durch die Funktion
   $b_a(t) = 1 - \dfrac{a}{a + e^{2t}}$ (Zeit $t \geq 0$) beschrieben. Die Fläche wird dabei in dm^2 gemessen.
   Nach 10 Tagen nimmt die Bakterienkultur die Fläche $0{,}75\ dm^2$ ein.

   a) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a für diese Versuchsbedingungen.

   b) Zu welchem Zeitpunkt nahm die Kultur eine Fläche vom Inhalt $0{,}1\ dm^2$ ein?

LK Mathematik * K13 * Logarithmus und Exponentialfunktionen * Lösungen

1. a) $D_k = \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 2k$

b) $f_k(x) = 2k\cdot\left(k\cdot e^x+1\right)^{-1} \Rightarrow f_k'(x) = 2k\cdot(-1)\cdot\left(k\cdot e^x+1\right)^{-2}\cdot ke^x = \dfrac{-2k^2e^x}{\left(k\cdot e^x+1\right)^2}$

$f_k'(x) = \dfrac{-2k^2e^x}{\left(k\cdot e^x+1\right)^2} < 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, d.h. f_k ist streng monoton fallend.

Wegen der Grenzwerte aus 1a) folgt damit für die Wertemenge $W_k = \,]\,0\,;2k\,[$.

c) Als streng monoton fallende Funktion ist f_k umkehrbar.

f_k^{-1}: $\quad x = \dfrac{2k}{k\cdot e^y+1} \Leftrightarrow k\cdot e^y+1 = \dfrac{2k}{x} \Leftrightarrow k\cdot e^y = \dfrac{2k}{x}-1 \Leftrightarrow$

$e^y = \dfrac{2k-x}{k\cdot x} \Leftrightarrow y = f_k^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{2k-x}{k\cdot x}\right)$ mit $x\in W_k = \,]0;2k[$

d) $Q_k(k\,;-\ln k) = Q_k(x_Q\,;y_Q)$

Die genannte Symmetrie gilt genau dann, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$y_Q - f_k^{-1}(x_Q+x) = f_k^{-1}(x_Q-x) - y_Q \Leftrightarrow f_k^{-1}(x_Q-x)+f_k^{-1}(x_Q+x) = 2y_Q \Leftrightarrow$

$f_k^{-1}(k-x)+f_k^{-1}(k+x) = 2\cdot(-\ln k)$; berechne nun die linke Seite dieser Gleichung:

$f_k^{-1}(k-x)+f_k^{-1}(k+x) = \ln\left(\dfrac{2k-(k-x)}{k(k-x)}\right)+\ln\left(\dfrac{2k-(k+x)}{k(k+x)}\right) =$

$\ln\left(\dfrac{k+x}{k(k-x)}\cdot\dfrac{k-x}{k(k+x)}\right) = \ln\left(\dfrac{(k+x)\cdot(k-x)}{k^2(k-x)\cdot(k+x)}\right) = \ln\left(k^{-2}\right) = -2\cdot\ln k =$ "rechte Seite"

Symmetriepunkt $P_k(x_P\,;y_P) = P_k(y_Q\,;x_Q) = (-\ln k\,/\,k)$

$y_P = c(x_P) = k$ und $x_P = -\ln k \Rightarrow k = e^{-x_P}$ d.h. $c(x_P) = e^{-x_P}$ also

$c(x) = e^{-x}$ mit $x\in\mathbb{R}$, denn $x_P = -\ln k$ nimmt für $k\in\mathbb{R}^+$ alle Werte aus $\mathbb{R}$ an.

2. a) Nullstellen: $0 = x\cdot\left(1-\ln x\right)^2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x_1 = e$

$f'(x) = \left(1-\ln x\right)^2 + x\cdot 2\cdot\left(1-\ln x\right)\cdot\dfrac{-1}{x} = \left(1-\ln x\right)^2 - 2\cdot\left(1-\ln x\right) =$

$\left(1-\ln x\right)\cdot\left(-1-\ln x\right) = -1+\left(\ln x\right)^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\ln x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow x_1 = e$ bzw. $x_2 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$f'(x)$ ändert bei x_1 das Vorzeichen von - auf + und

$f'(x)$ ändert bei x_2 das Vorzeichen von + auf - , d.h.

$TIP(e;0)$ und $HOP(\frac{1}{e}\,;\,\frac{4}{e})$

b) $f''(x) = 2\cdot\left(\ln x\right)\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$; $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1$

Da $f''(x)$ bei x_3 das Vorzeichen (von - auf +) ändert, liegt bei W(1 / 1) ein Wendepunkt vor.

$f'(1) = -1$ also gilt für die Wendetangente: $y = -x + t$; mit (1/1) eingesetzt folgt $t = 2$ und damit $y = -x + 2$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = "\infty\cdot(-\infty)" = -\infty$ und

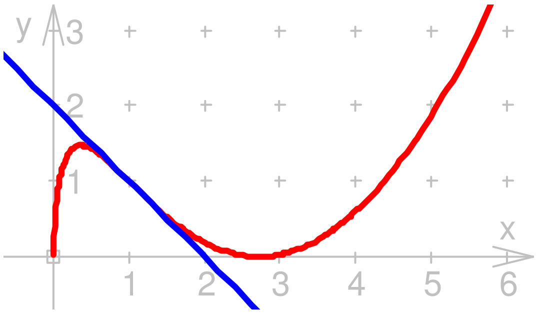
$$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = "0\cdot\infty" = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{(1-\ln x)^2}{x^{-1}} = "\frac{\infty}{\infty}" \overset{l'Hosp.}{=} \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{2\cdot(1-\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{(1-\ln x)}{-x^{-1}} =$$

$$"\frac{\infty}{\infty}" \overset{l'Hosp.}{=} \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{-x^{-1}}{+x^{-2}} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} (-x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^2 - 1 = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} (\ln x)^2 - 1 = \infty$

und damit $W_f = [0\,;\infty[$

d)



e) $F(x) = \frac{x^2}{2}\cdot\left[\frac{5}{2} - 3\ln x + (\ln x)^2\right] \Rightarrow$

$F'(x) = x\cdot\left[\frac{5}{2} - 3\ln x + (\ln x)^2\right] + \frac{x^2}{2}\cdot\left[-\frac{3}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right] =$

$2{,}5x - 3x\ln x + x(\ln x)^2 - 1{,}5x + x\ln x = x - 2x\ln x + x(\ln x)^2 =$

$x\cdot(1 - 2\ln x + (\ln x)^2) = x\cdot(1-\ln x)^2 = f(x)$; also ist F eine Stammfunktion von f.

f) $\int\limits_1^e f(x)\,dx - \int\limits_1^2 -x+2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{5}{2} - 3\ln x + (\ln x)^2\right)\right]_1^e - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 =$

$\left[0{,}5e^2(2{,}5 - 3 + 1) - 0{,}5\cdot(2{,}5 - 0 + 0)\right] - 0{,}5 = 0{,}25e^2 - 1{,}75 \approx 0{,}097$

3. a) Wählt man als Einheit für t Tage, so gilt:

$b_a(10) = 0{,}75 \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+e^{2\cdot 10}} = 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{a}{a+e^{20}} \Leftrightarrow a + e^{20} = 4a \Leftrightarrow$

$a = \frac{e^{20}}{3} \approx 1{,}617\cdot 10^8$

b) $b_a(t) = 0{,}1 \Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+e^{2\cdot t}} = 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}9 = \frac{a}{a+e^{2\cdot t}} \Leftrightarrow 0{,}9\cdot a + 0{,}9e^{2\cdot t} = a \Leftrightarrow$

$0{,}9e^{2\cdot t} = 0{,}1\cdot a \Leftrightarrow e^{2\cdot t} = \frac{a}{9} \Leftrightarrow 2t = \ln\left(\frac{a}{9}\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1{,}617\cdot 10^8}{9}\right) \approx 8{,}35$

Nach 8,35 Tagen war die Ausbreitungsfläche 0,10 dm^2 groß.