LK M * Aufgaben zum Summenzeichen Σ **Übungsblatt 2**

Mit dem Summensymbol Σ kann man Summen sehr übersichtlich und kurz schreiben, z.B.

$$1+3+5+7+9+\ldots+201 = \sum_{i=0}^{100} 2i+1 = \sum_{k=1}^{101} 2k-1 = \sum_{n=5}^{105} 211-2n$$

1. Schreiben Sie die folgenden Summen auf mindestens zwei verschiedene Arten mit dem Summensymbol.

a) 5 + 9 + 13 + ... + 425
b) 500 + 493 + 486 + 479 + ... + 10
c) 1 + 4 + 9 + ... + 1000000
d) 26 + 37 + 50 + ... + 626
e) 2 + 4 + 8 + 16 + ... 1024
f) 30 + 42 + 56 + 72 + ... + 10100
g) -2 + 4 + 22 + 76 + ... + 531436
h) 3 + 15 + 35 + 63 + ... + 39999

2. Bestimmen Sie die Werte aller Fragezeichen!

a) $\sum_{i=10}^{90} 5i+3 = \sum_{k=?}^{?} 5k-2$

b) $\sum_{i=1}^{50} i^3 = \sum_{k=?}^{?} (k-4)^?$

c) $\sum_{i=1}^{20} (i-1)\cdot(i+1)+9 = \sum_{k=?}^{?} k^2 + ?$

d) $\sum_{i=5}^{25} 2^{3i}+3 = \sum_{k=?}^{?} (?)^k + ?$

3. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formeln

a) $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$

b) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$

c) $\sum_{i=0}^{n} 5^i = \frac{5^{n+1}-1}{4}$

d) $\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i = a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

e) $\sum_{i=0}^{20} 2^i = 2097151$

f) $\sum_{i=3}^{18} 3^i = 581130720$

4. Auch unendlich viele Summanden können einen endlichen Summenwert besitzen.
Für den Grenzwert schreibt man abkürzend $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i$
Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind!

a) $\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 2$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^i = 0{,}5$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = 1$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ existiert nicht!

G.R.

LK M * Aufgaben zum Summenzeichen Σ **Übungsblatt 2**

Lösungen:

1a) $\sum_{i=0}^{105} 5+4\cdot i = \sum_{k=1}^{106} 1+4\cdot k$

b) $\sum_{i=0}^{70} 500-7\cdot i = \sum_{k=1}^{71} 3+7\cdot k$

c) $\sum_{i=1}^{1000} i^2 = \sum_{i=0}^{999} (i+1)^2$

d) $\sum_{i=5}^{25} 1+i^2 = \sum_{i=0}^{20} 1+(i+5)^2$

e) $\sum_{i=1}^{10} 2^i = \sum_{i=0}^{9} 2^{i+1}$

f) $\sum_{i=5}^{100} i\cdot(i+1) = \sum_{i=1}^{96} (i+4)\cdot(5+1)$

g) $\sum_{i=1}^{12} 3^i - 5 = \sum_{i=0}^{11} 3^{i+1} - 5$

h) $\sum_{i=1}^{100} (2i-1)\cdot(2i+1) = \sum_{i=1}^{100} (4i^2-1)$

2a) $\sum_{i=10}^{90} 5i+3 = \sum_{k=11}^{91} 5k-2$

b) $\sum_{i=1}^{50} i^3 = \sum_{k=5}^{54} (k-4)^3$

c) $\sum_{i=1}^{20} (i-1)\cdot(i+1)+9 = \sum_{k=1}^{20} k^2 + 8$

d) $\sum_{i=5}^{25} 2^{3i}+3 = \sum_{k=5}^{25} (8)^k + 3$

3a) $\sum_{i=1}^{100} i = (1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51) = 50\cdot 101 = 5050$

b) $\sum_{i=1}^{n} i = (1+n)+(2+(n-1))+\ldots+(\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}+1)) = \frac{n}{2}\cdot(n+1) = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$, falls n gerade

und $\sum_{i=1}^{n} i = (1+n)+(2+(n-1))+\ldots+(\frac{n-1}{2}+(\frac{n+3}{2}))+\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}\cdot n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$,

falls n ungerade ist. Auch ein Beweis mit vollständiger Induktion ist möglich!

c) $\sum_{i=0}^{n} 5^i = \sum_{i=0}^{n} 1\cdot 5^i = 1\cdot\frac{5^{n+1}-1}{5-1} = \frac{5^{n+1}-1}{4}$ nach Aufgabe 3d.

d) $(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i = q\cdot\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i - \sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i = \sum_{i=1}^{n+1} a\cdot q^i - \sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i = a\cdot(q^{n+1}-q^0)$

daraus folgt $\sum_{i=0}^{n} a\cdot q^i = \frac{a\cdot(q^{n+1}-q^0)}{(q-1)} = \frac{a\cdot(q^{n+1}-1)}{(q-1)}$

e) $\sum_{i=0}^{20} 2^i = \sum_{i=0}^{20} 1\cdot 2^i = 1\cdot\frac{2^{21}-1}{2-1} = 2^{21}-1 = 2097151$ nach 3d

f) $\sum_{i=3}^{18} 3^i = \sum_{i=0}^{15} 27\cdot 3^i = 27\cdot\frac{3^{16}-1}{3-1} = 581130720$

4a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} 1\cdot(\frac{1}{2})^i = \lim\limits_{n\to\infty} 1\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0,5^{n+1} - 1}{-0,5} = \frac{-1}{-0,5} = 2$

b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^i = -\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \sum\limits_{i=0}^{\infty} 1\cdot(\frac{1}{3})^i = -1 + \lim\limits_{n\to\infty} 1\cdot\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = -1 + \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = 0,5$

c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) + ... \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + ... =$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... \to \infty$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1-k}{k\cdot(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k\cdot(k+1)} - \frac{k}{k\cdot(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} =$

$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm .... = \frac{1}{1} = 1$

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm ...$ existiert nicht, denn die Partialsummen haben abwechselnd die Werte 1 und 0 .

f) Wahre Aussage! $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ existiert nicht! (Siehe 4e)