LK Mathematik * K12 * Aufgaben zur Integralrechnung * Übungsblatt 3

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^3 - k^2 x$ mit $k > 0$ und $g(x) = -2x$.

   a) Für welche Werte von k schließen die Graphen von f_k und g eine Fläche ein?

   b) Für welchen Wert von k hat die von den Graphen eingeschlossene Fläche den Inhalt 2 ?

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = \dfrac{2tx - x^2}{1 + t^3}$ mit $t > 0$.

   Jeder Graph der Schar schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A(t)$ ein.

   a) Bestimmen Sie A(t). (Ergebnis: $A(t) = \dfrac{4t^3}{3\cdot(1+t^3)}$)

   b) Gibt es Werte für t mit maximalem bzw. minimalem Flächeninhalt?

3. Gegeben ist die Funktionenschar $g_m(x) = m\cdot x$ mit $m > 0$ und $f(x) = 4x - x^2$.

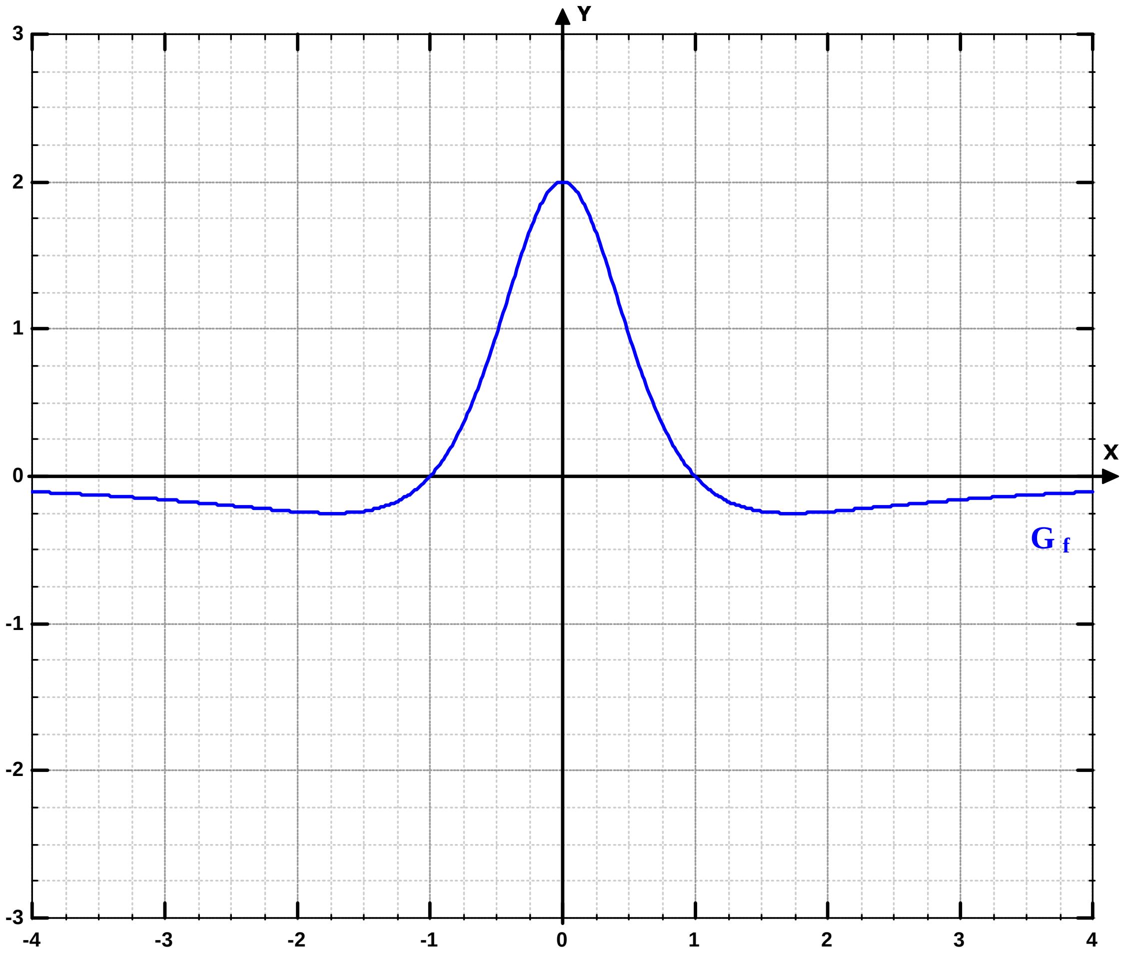
   a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, den G_f mit der x-Achse einschließt.

   b) Bestimmen Sie m so, dass der Graph von g_m diese Fläche aus a) im Verhältnis 1 : 7 teilt.

4. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f.
   Tragen Sie in das Bild die Graphen der beiden folgenden Funktionen möglichst genau ein.
   Beachten Sie insbesondere alle speziellen Punkte mit bekannten Eigenschaften.

   a) Ableitungsfunktion f' von f

   b) Integralfunktion $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$



LK Mathematik * K12 * Aufgaben zur Integralrechnung * Übungsblatt 3 * Lösungen

1. a) Schnittpunkte der Graphen bei $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{k^2 - 2}$ falls $k > \sqrt{2}$.
   Für $k > \sqrt{2}$ schließen die beiden Graphen zwei kongruente Flächen ein.

   b) $A(k) = 2 \cdot \int\limits_0^{\sqrt{k^2-2}} g(x) - f_k(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - 2)^2$ und $A(k) = 2 \Leftrightarrow k = 2$

2. a) $A(t) = \int\limits_0^{2t} f_t(x)\,dx = \frac{4t^3}{3 \cdot (1+t^3)}$

   b) $A(t)$ ist eine streng monoton wachsende Funktion, denn $A'(t) = \frac{3t^2}{(1+t^3)^2} > 0$
   für alle $t > 0$, es gibt also kein t mit $A(t)$ ist maximal oder minimal.
   Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} A(t) = \frac{4}{3}$ und $\lim\limits_{x\to 0^+} A(t) = 0$ gilt $A(t) \in \left]0; \frac{4}{3}\right[$.

3. a) $A = \int\limits_0^4 f(x)\,dx = \frac{32}{3}$

   b) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(0\,/\,0)$ und $S_2(4 - m\,/\,4m - m^2)$

   $A_1 = \int\limits_0^{4-m} f(x) - g_m(x)\,dx = \frac{1}{6} \cdot (4-m)^3$ und $A_2 = A - A_1 = \frac{32}{3} - A_1$

   $A_1 : A_2 = 1 : 7 \Leftrightarrow A_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{32}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot (4-m)^3 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = 2$

4.