LK Mathematik * K13 * Übungsaufgaben für den LK Mathematik * Kurvendiskussion

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs.
   Geben Sie insbesondere alle Asymptoten an.
c) Zeigen Sie, dass der Graph von f keine horizontalen Tangenten hat.
   Skizzieren Sie nun den Graphen.

2. Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{x^3 + 5x}{2x^2 + 1}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
   Prüfen Sie auf Symmetrie.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs.
   Geben Sie insbesondere alle Asymptoten an.
c) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von g.
d) Begründen Sie, dass die sich ins Unendliche erstreckende Fläche zwischen dem Graphen und der schiefen Asymptote keinen endlichen Flächeninhalt hat.

3. Gegeben ist $f(x) = \frac{1 + (\ln(x))^2}{1 - (\ln(x))^2}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs.
   Geben Sie insbesondere alle Asymptoten an.
c) Zeigen Sie, dass der Graph von f den Tiefpunkt (1 / 1) besitzt.
   Skizzieren Sie nun den Graphen.

4. Gegeben ist die Funktion $\ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Grenzen des Definitionsbereichs.
   Geben Sie insbesondere alle Asymptoten an.
c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f .
d) Zeigen Sie, dass der Graph von g genau einen Wendepunkt besitzt.
   Skizzieren Sie nun den Graphen.

5. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{k e^x}{1 + 2e^x}$ mit $k \in R \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen.
b) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k an den Grenzen des Definitionsbereichs.
   Geben Sie insbesondere alle Asymptoten an.
c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_k .
d) Zeigen Sie, dass der Graph von f_k genau einen Wendepunkt $W(-\ln(2) \,/\, \frac{k}{4})$ hat.
e) Zeigen Sie, dass der Graph von f_k punktsymmetrisch bezüglich dieses Wendepunktes ist.
f) Die negative x-Achse, die negative y-Achse und der Graph von f_k schließen eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche mit endlichem Inhalt A_k ein.
   Berechnen Sie A_k .

Lösungen zu „Übungsaufgaben für den LK Mathematik * Kurvendiskussion“

1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\,;\,\sqrt{3}\}$; Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm 2$

   b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}\pm 0} f(x) = \mp\infty$ und $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}\pm 0} f(x) = \mp\infty$

   senkrechte Asymptoten: $x = -\sqrt{3}$ und $x = \sqrt{3}$
   schräg liegende Asymptote: $y = x$ (für $x \to \pm\infty$)

   c) $f'(x) = \dfrac{x^4 - 5x^2 + 12}{(x^2 - 3)^2}$;

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 5u + 12 = 0$ (mit $u = x^2$)
   aber $u^2 - 5u + 12 = 0$ hat keine Lösung wegen $D = 25 - 4 \cdot 12 < 0$, also gibt es keine Stelle mit waagrechter Tangente.

2. a) $D_g = \mathbb{R}$; Nullstelle: $x_1 = 0$; $g(-x) = -g(x)$ d.h. G_g ist punktsymmetr.

   b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; schräg liegende Asymptote: $y = \dfrac{1}{2} \cdot x$ (für $x \to \pm\infty$)

   c) $g'(x) = \dfrac{2x^4 - 7x^2 + 5}{(2x^2 + 1)^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2u^2 - 7u + 5 = 0$ mit $u = x^2$ $\Leftrightarrow$

   $2u^2 - 7u + 5 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{5}{2}$ und $u_2 = 1$ d.h. $x_{1/2} = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ und $x_{3/4} = \pm 1$

   $HOP(1/2)$, $TIP(\dfrac{\sqrt{10}}{2} / \dfrac{5\sqrt{10}}{8})$ und $HOP(-\dfrac{\sqrt{10}}{2} / -\dfrac{5\sqrt{10}}{8})$, $TIP(-1/-2)$

   d) $g(x) - \dfrac{1}{2} \cdot x = \dfrac{9x}{4x^2 + 2}$ und für $a \geq 1$ gilt

   $$\int_a^\infty \frac{9x}{4x^2 + 2}\,dx \geq \int_a^\infty \frac{9x}{9x^2}\,dx = \int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx \geq \ln \infty = \infty$$

3. a) $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{\dfrac{1}{e}\,;\,e\}$; es gibt keine Nullstellen.

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ also waagrechte Asymptote $y = -1$;

   $\lim\limits_{x \to e^{-1} \pm 0} f(x) = \pm\infty$ und $\lim\limits_{x \to e \pm 0} f(x) = \mp\infty$

   senkrechte Asymptoten: $x = \dfrac{1}{e}$ und $x = e$

   c) $f'(x) = \dfrac{4\ln(x)}{x \cdot (1 - (\ln(x))^2)^2}$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$

   f' ändert bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen von - auf +, d.h. G_f hat bei x_1 den Tiefpunkt TIP (1 / 1).

4. a) $D_f =]-2\,;\infty[\setminus\{0\}$;

$\text{Nullstellen}: \; g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x+2}{x^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -1\,,\; x_2 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2}\right) = \text{" } \ln(+0) \text{ "} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} g(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to -2+0} g(x) = -\infty$; also senkrechte Asymptoten: $x = -2$ und $x = 0$

c) $g'(x) = -\frac{4+x}{x\cdot(x+2)}$; $g'(x) > 0$ für $-2 < x < 0$ und $g'(x) < 0$ für $0 < x$

g ist also in $]-2\,;0[$ streng monoton wachsend und in $]0\,;\infty[$ streng monoton fallend.

d) $g''(x) = \frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2}$ und $g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -4 \pm 2\sqrt{2}$

$x_2 = -4 - 2\sqrt{2} \notin D_g$ und g'' ändert bei $x_1 = -4 + 2\sqrt{2}$ das Vorzeichen.

Also hat G_g genau einen Wendepunkt bei $x_1 = -4 + 2\sqrt{2}$.

5. a) $D_{f_k} = R$; es gibt keine Nullstellen

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ also waagrechte Asymptote $y=0$ für $x \to -\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{k}{2}$ also waagrechte Asymptote $y=\frac{k}{2}$ für $x \to +\infty$;

c) $f_k'(x) = \frac{k e^x}{(1+2e^x)^2}$;

für alle $x \in R$ gilt: $f_k'(x) > 0$ falls $k > 0$ und $f_k'(x) < 0$ falls $k < 0$;

für $k > 0$ ist f_k streng monoton steigend, für $k < 0$ dagegen streng monoton fallend.

d) $f_k''(x) = \frac{ke^x\cdot(1-2e^x)}{(1+2e^x)^3}$ und $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -\ln(2)$

f_k'' ändert bei x_1 das Vorzeichen, also hat der Graph bei $W(-\ln(2)/\frac{k}{4})$ einen WP.

e) Zu zeigen ist für $W = (x_1/y_1) = (-\ln(2)/\frac{k}{4})$:

$f_k(x_1 + x) - y_1 = y_1 - f_k(x_1 - x) \;\Leftrightarrow\; f_k(x_1 + x) + f_k(x_1 - x) = 2y_1$

linke Seite: $f_k(x_1 + x) + f_k(x_1 - x) = \frac{ke^{-\ln 2 + x}}{1 + 2e^{-\ln 2 + x}} + \frac{ke^{-\ln 2 - x}}{1 + 2e^{-\ln 2 - x}} =$

$$= \frac{\frac{k}{2}\cdot e^x}{1 + e^x} + \frac{\frac{k}{2\cdot e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{k}{2}\cdot\left(\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{e^x + 1}\right) = \frac{k}{2}\cdot\frac{e^x + 1}{1 + e^x} = \frac{k}{2}$$

rechte Seite: $2\cdot y_1 = 2\cdot\frac{k}{4} = \frac{k}{2}$ Die geforderte Bedingung ist also erfüllt!

f) $\int f_k(x)\,dx = \frac{k}{2}\cdot\ln\left(\left|1 + 2e^x\right|\right) + c$ und daher

$$A_k = \left|\int\limits_{-\infty}^{0} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{k}{2}\cdot\ln\left(\left|1+2e^x\right|\right)\right]_{-\infty}^{0}\right| = \left|\frac{k}{2}\cdot(\ln 3 - \ln 1)\right| = \frac{|k|\cdot\ln 3}{2}$$