1. Extemporale im LK Mathematik, K13, 05.03.2008

Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{5e^x}{1 + 2e^x}$ soll untersucht werden.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Schnittpunkte mit den beiden Achsen des Koordinatensystems.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.

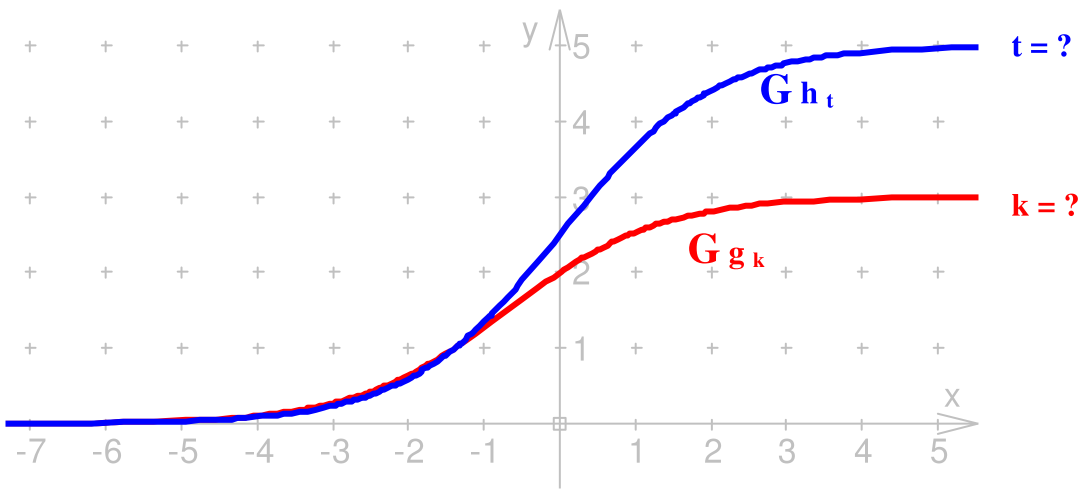
c) Zeigen Sie, dass f streng monoton ist und geben Sie den Wertebereich W_f an. Skizzieren Sie den Graphen.

d) Als streng monotone Funktion ist f umkehrbar.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion und geben Sie den Definitionsbereich von f^{-1} an.

e) Geben Sie $\int f(x)\,dx$ in integralfreier Darstellung an.
[Ergebnis: $\int f(x)\,dx = 2{,}5 \cdot \ln\left(1 + 2e^x\right) + C$]

f) Der Graph von f, die negative x-Achse und die y-Achse begrenzen eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche.
Zeigen Sie, dass diese Fläche endlichen Inhalt hat.

g) Das Bild zeigt die Graphen zweier Funktionen g_k und h_t, die mit f „verwandt“ sind.
Es gilt: $g_k(x) = \dfrac{k e^x}{1 + 2e^x}$ und $h_t(x) = \dfrac{5e^x}{1 + t e^x}$.
Bestimmen Sie die Werte von k und von t, die zu den abgebildeten Funktionsgraphen gehören. Geben Sie eine kurze Begründung.



Aufgabe	a	b	c	d	e	f	g	Summe
Punkte	3	4	6	5	4	4	4	30

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale im LK Mathematik, K13, 05.03.2008 * Lösung

a) $f(x) = \dfrac{5e^x}{1+2e^x}$; $D_f = \mathbb{R}$ und $f(0) = \dfrac{5\cdot 1}{1+2\cdot 1} = \dfrac{5}{3}$ und $f(x) = 0$ hat keine Lösung.

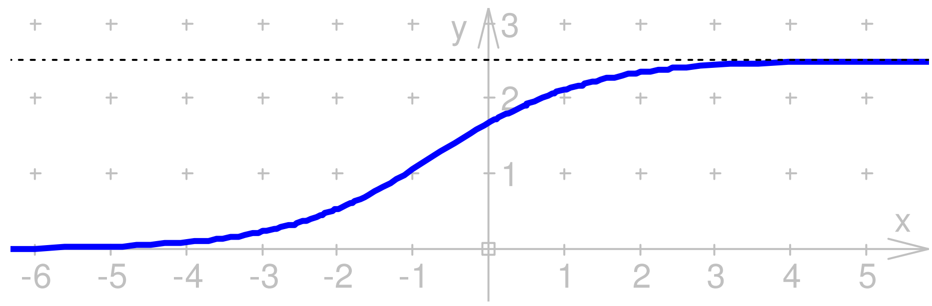
Der Graph von f schneidet also nur die y-Achse [in $S(0/\frac{5}{3})$] und nicht die x-Achse.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5e^x}{1+2e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{1\cdot e^{-x}+2} = \dfrac{5}{1\cdot 0+2} = \dfrac{5}{2}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5e^x}{1+2e^x} = \dfrac{5\cdot 0^+}{1+2\cdot 0} = 0^+$

$W_f = \,]\,0\,;\,\dfrac{5}{2}\,[$

c) $f'(x) = \dfrac{(1+2e^x)\cdot 5e^x - 5e^x\cdot 2\cdot e^x}{\left(1+2e^x\right)^2} = \dfrac{5e^x + 10e^{2x} - 10e^{2x}}{\left(1+2e^x\right)^2} = \dfrac{5e^x}{\left(1+2e^x\right)^2} > 0$

f ist also streng monoton steigend.



d) f^{-1}: $x = \dfrac{5e^y}{1+2e^y} \Leftrightarrow x\cdot(1+2e^y) = 5e^y \Leftrightarrow x + 2xe^y = 5e^y \Leftrightarrow$

$x = 5e^y - 2xe^y \Leftrightarrow x = (5-2x)\cdot e^y \Leftrightarrow e^y = \dfrac{x}{5-2x} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{x}{5-2x}\right)$

und $D_{f^{-1}} = W_f = \,]\,0\,;\,\dfrac{5}{2}\,[$

e) $\displaystyle\int \frac{5e^x}{1+2e^x}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{5}{2}\cdot\ln(z) + C = \frac{5}{2}\cdot\ln(1+2e^x) + C$

mit der Substitution $z = 1+2e^x \Rightarrow dz = 2e^x\,dx$

f) $\displaystyle\int_k^0 \frac{5e^x}{1+2e^x}\,dx = \left[\frac{5}{2}\cdot\ln(1+2e^x)\right]_k^0 = \frac{5}{2}\cdot\ln(3) - \frac{5}{2}\cdot\ln(1+2e^k) =$

$\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{5e^x}{1+2e^x}\,dx = \lim_{k\to-\infty}\left(\frac{5}{2}\cdot\ln(3) - \frac{5}{2}\cdot\ln(1+2e^k)\right) = \frac{5}{2}\cdot\ln(3) - \frac{5}{2}\cdot\ln(1+0) = \frac{5}{2}\cdot\ln(3)$

h) $2 = g_k(0) = \dfrac{k}{1+2} = \dfrac{k}{3} \Rightarrow k = 6$ und $5 = \lim\limits_{x\to\infty} h_t(x) = \dfrac{5}{t} \Rightarrow t = 1$