1. Klausur im LK Mathematik * K13 * 14.11.2007

1. Anton und Berta vereinbaren folgendes Spiel.
   In einer Urne befinden sich drei Kugeln mit den Aufschriften 1, 2 und 3.
   Anton zieht hintereinander mit Zurücklegen zwei Kugeln und erhält von Berta das Produkt der beiden Zahlen in Euro ausgezahlt. Anton zahlt einen Spieleinsatz von 4 € an Berta.

   a) Handelt es sich um ein faires Spiel? (Begründung mit Hilfe einer Rechnung!)
   b) Bestimmen Sie für die Zufallsgröße X = „Reingewinn von Anton“ die Varianz und die Standardabweichung.
   c) Wie oft muss Anton das Spiel durchführen, damit sich sein durchschnittlicher Reingewinn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% um weniger als 0,50 € vom Erwartungswert unterscheidet? (Abschätzung mit Tschebyschow)

2. Integrierte Schaltungen (ICs) werden auf so genannten Wafern (flache Scheiben) hergestellt. Eine Maschine produziert pro Wafer 200 ICs mit einem Ausschussanteil von 15%.
   Eine zweite Maschine kann mit Hilfe eines geeigneten Tests fehlerhafte ICs mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% erkennen. (Fehlerfreie ICs werden stets als fehlerfrei erkannt.)

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich auf einem Wafer höchstens 25 defekte ICs befinden?
   b) Welche Anzahl defekter ICs auf einem Wafer kommt am häufigsten vor?
      Welche Anzahlen defekter ICs auf einem Wafer treten mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 0,5% auf?
   c) Wie viele Wafer muss die Maschine mindestens produzieren, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% wenigstens ein Wafer höchstens 20 defekte ICs hat?
   d) Die zweite Maschine testet alle 200 ICs eines Wafers mit genau 30 defekten ICs.
      d_1) Wie viele defekte ICs werden dabei erwartungsgemäß nicht erkannt?
      d_2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei fehlerhafte ICs nicht erkannt werden?

3. Die Fluggesellschaft „Broken Wings“ weiß aus langjähriger Erfahrung, dass 40 Prozent der Passagiere Orangensaft trinken. Alle 240 Sitzplätze an Bord ihrer Maschine sind besetzt, und jeder Passagier erhält genau ein Getränk.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jeder Wunsch nach Orangensaft erfüllt werden kann, wenn die Maschine 100 Dosen Orangensaft mit sich führt?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der getrunkenen Orangensäfte sich um höchstens 10 vom Erwartungswert unterscheidet?
   c) Wie viele Dosen Orangensaft müssen mindestens an Bord sein, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% jeden Orangensaftwunsch erfüllen will.

4. Der Zulieferer eines Supermarktes garantiert, dass höchstens 2,0% der gelieferten Schokonikoläuse gebrochen sind. Man vereinbart eine Reklamation, falls bei einer Lieferung von 500 Nikoläusen mehr als 15 Exemplare gebrochen sind.
   Mit welcher (Höchst-)Wahrscheinlichkeit wird zu Unrecht reklamiert?

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	c	d_1	d_2	3a	b	c	4	Summe
Punkte	5	4	6	2	3	5	2	2	4	5	5	5	48

Gutes Gelingen! G.R.

1. Klausur im LK Mathematik * K13 * 14.11.2007 * Lösung

1. a) Zufallsgröße Y = „Produkt der Zahlen“

Zufallsgröße X = „Antons Reingewinn“
X = (Y – 4) €

y	1	2	3	4	6	9
P(Y = y)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(Y) = \frac{1}{9}\cdot\left(1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 6 + 1\cdot 9\right) = \frac{36}{9} = 4 \quad \text{und} \quad E(X) = 0\,€$$

Das Spiel ist also fair.

b) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}((Y-4)€) = \mathrm{Var}(Y)\cdot €^2 = \left(E(Y^2) - E(Y)^2\right)€^2 =$

$$\frac{1}{9}\cdot\left(1\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 4^2 + 2\cdot 6^2 + 1\cdot 9^2\right)€^2 - 4^2€^2 = \left(\frac{196}{9} - 4^2\right)€^2 = \frac{52}{9}\,€^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{\sqrt{52}}{3}\,€$$

c) Für $Z = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ gilt $E(Z) = 0$ und $\mathrm{Var}(Z) = \dfrac{n\cdot \mathrm{Var}(X)}{n^2} = \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{n}$.

Wegen $P\left(\,|Z - 0| < 0{,}50\,€\right) \geq 1 - \dfrac{\mathrm{Var}(Z)}{(0{,}50\,€)^2}$ gilt $P\left(\,|Z - 0| < 0{,}50\,€\right) \geq 90\%$,

falls gilt $1 - \dfrac{\mathrm{Var}(Z)}{(0{,}50\,€)^2} \geq 90\% \Leftrightarrow 0{,}10 \geq \dfrac{\mathrm{Var}(Z)}{(0{,}50\,€)^2} \Leftrightarrow 0{,}025\,€^2 \geq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{n} \Leftrightarrow$

$0{,}025\,€^2 \geq \dfrac{52\,€^2}{9\cdot n} \Leftrightarrow n \geq \dfrac{52}{9\cdot 0{,}025} \Leftrightarrow n \geq 231{,}1\ldots$ also $n \geq 232$.

2. a) $P(X \leq 25) = F_{0{,}15}^{200}(25) = 0{,}18762 \approx 18{,}8\%$ (Tabelle S. 49)

b) $P(X = 30) = B(200;0{,}15;30) = 0{,}07878$ hat den größten Wert, 30 defekte ICs kommen also am häufigsten vor.

Für eine Anzahl $x \in \{0,1,\ldots,18\} \cup \{43,44,\ldots,200\}$ an defekten ICs ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,5%. (Tabelle S. 26)

c) $P(X \leq 20) = F_{0{,}15}^{200}(20) = 0{,}02547 = p_1$

$P(\text{wenigstens 1 Wafer hat höchstens 20 defekte ICs}) =$

$1 - P(\text{jeder Wafer hat mindestens 21 defekte ICs}) = 1 - (1-p_1)^n \geq 90\% \Leftrightarrow$

$10\% \geq (1-p_1)^n \Leftrightarrow \ln(0{,}10) \geq n\cdot\ln(1-p_1) \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}10)}{\ln(1-0{,}02547)} = 89{,}2\ldots$

Die Maschine muss also mindestens 90 Wafer produzieren.

d_1) Es werden durchschnittlich $30\cdot 10\% = 3$ defekte ICs nicht erkannt.

d_2) $P(Y = 2) = B(30;0{,}10;2) = 0{,}22766 \approx 22{,}8\%$ (Tabelle S. 20)

3\. a) $P(\ X \le 100\ ) = F_{0,40}^{240}(100) \approx \phi\left(\frac{100 - 240\cdot 0,40 + 0,5}{\sqrt{240\cdot 0,40\cdot 0,60}}\right) = \phi\left(\frac{100 - 96 + 0,5}{\sqrt{57,6}}\right) \approx$

$\phi(0,59) = 0,72240 \approx 72,2\%$

b) $P(\ |X - E(X)| \le 10\ ) = P(\ |X - 96| \le 10\ ) \approx 2\cdot\phi\left(\frac{10 + 0,5}{\sqrt{57,6}}\right) - 1 \approx$

$2\cdot\phi(1,38) - 1 = 2\cdot 0,91621 - 1 = 0,83242 \approx 83,2\%$

c) $P(\ X \le k\ ) \ge 95\%$ gilt näherungsweise, falls gilt $\phi\left(\frac{k - 96 + 0,5}{\sqrt{57,6}}\right) \ge 0,95 \Leftrightarrow$

$\frac{k - 96 + 0,5}{\sqrt{57,6}} \ge 1,6449 \Leftrightarrow k - 95,5 \ge 1,6449\cdot\sqrt{57,6} \Leftrightarrow k \ge 107,98...$

An Bord müssen mindestens 108 Dosen Orangensaft sein.

4\. $P_{p\le 0,02}^{500}(\ X > 15\ ) = 1 - P_{p\le 0,02}^{500}(\ X \le 15\ ) \le 1 - P_{0,02}^{500}(\ X \le 15\ ) \approx$

$1 - \phi\left(\frac{15 - 500\cdot 0,02 + 0,5}{\sqrt{500\cdot 0,02\cdot 0,98}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{5,5}{\sqrt{9,8}}\right) \approx 1 - \phi(1,76) = 1 - 0,96080 =$

$0,0392 \approx 3,9\%$

Die Reklamation erfolgt mit einer Höchstwahrscheinlichkeit von etwa 3,9% zu Unrecht.