2. Klausur im LK Mathematik, K13, am 09.01.2008

1. Im $\mathbb{R}^3$ sind die drei Punkte $A(1/2/3)$, $B(4/2/0)$ und $C(3/0/2)$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$.
   b) Im Dreieck ABC schneidet die Höhe h_c die Seite $[AB]$ im Punkt F.
      Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes F.
      [Ergebnis: F(2,5/2/1,5)]
   c) In welchem Verhältnis teilt F die Strecke [AB]?
      Welche Aussage kann man daher über die Gestalt des Dreiecks ABC machen?
   d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. [Ergebnis: Flächeninhalt = 4,5]
   e) Eine Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche soll das Volumen $V = 18$ besitzen. Finden Sie möglichst geschickt die Koordinaten einer geeigneten Spitze S.

2. Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen E_1 und E_2:
   $E_1: \; 4x_1 + x_2 - 8x_3 = 4$ und $E_2: \; 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen E_1 und E_2.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h mit folgenden Eigenschaften:
      h hat weder mit E_1 noch mit E_2 gemeinsame Punkte und h hat von E_1 den Abstand $d = 2$. Zudem soll h bezüglich E_1 im gleichen Halbraum liegen wie der Ursprung.

3. Im $\mathbb{R}^3$ ist die Ebene $E: \; 2x_1 + 14x_2 - 5x_3 + 30 = 0$ gegeben.
   Die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(3/1/1)$ habe den Radius $\varrho = 5$.
   Zeigen Sie, dass sich die Ebene E und die Kugel K in einem Kreis $k(N;r)$ mit dem Radius $r = 4$ schneiden und bestimmen Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes N.
   (Eine Skizze ist hilfreich!)

4. Im $\mathbb{R}^3$ ist die Gerade $g: \; \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h, die g unter einem Winkel von 90° schneidet.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden k, die windschief zu g ist und von g den Abstand 5 hat.
   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E mit folgenden Eigenschaften:
      - $p: \; \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt ganz in E und
      - p ist die senkrechte Projektion von g in E.

      (Eine Skizze kann helfen!)

Aufgabe	1a	b	c	d	e	2a	b	3	4a	b	c	Summe
Punkte	4	4	3	3	6	5	5	7	2	5	4	48

Gutes Gelingen! G.R.

2. Klausur im LK Mathematik, K13, am 09.01.2008 * Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \dfrac{6-0+3}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

also $\alpha = 45^\circ$

b) $\overrightarrow{AF} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left(\overline{AB}\right)^2} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{6-0+3}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$, d.h. $\vec{F} = \vec{A} + \dfrac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1+1{,}5 \\ 2+0 \\ 3-1{,}5 \end{pmatrix}$

also F(2,5/2/1,5)

c) F teilt die Strecke [AB] im Verhältnis 1:1, d.h. F halbiert diese Strecke.
Das Dreieck ABC ist damit gleichschenklig und wegen $\alpha = 45^\circ = ß$ damit auch rechtwinklig ($\gamma = 90^\circ$).

d) $F_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{FC} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AC}^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 3^2 = 4{,}5$

e) $18 = V = \dfrac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 4{,}5 \cdot h = 1{,}5 \cdot h \Rightarrow h = 18 : 1{,}5 = 12$

Normalenvektor $\vec{n}$ zur Grundfläche: $\vec{n} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{AC} = 0$ d.h.

$3n_1 - 3n_3 = 0$ und $2n_1 - 2n_2 - n_3 = 0 \Rightarrow n_1 = n_3$ und $n_1 = 2n_2$

also z.B.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; für S z.B. möglich $\vec{S} = \vec{A} + 12 \cdot \vec{n}^{\,o} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 12 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$

also z.B. S(9/6/11)

2. a) $E_1 \cap E_2$: (1) $x_2 = 4 - 4x_1 + 8x_3$ eingesetzt in (2): $2x_1 - 2(4 - 4x_1 + 8x_3) + x_3 = 2$

$\Rightarrow 10x_1 - 15x_3 = 10 \Rightarrow 2x_1 - 3x_3 = 2$ und $x_2 = 4 - 4x_1 + 8x_3$ freie Wahl:

$x_1 = 1$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$ also $A(1/0/0) \in$ Schnittgerade bzw.

$x_1 = 4$, $x_3 = 2$ und $x_2 = 4 - 16 + 16 = 4$ also $B(4/4/2) \in$ Schnittgerade

also $g: \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ d.h. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Es muss gelten: h || g und für den Aufpunkt P von h gilt: $d(P; E_1) = -2$.

$E_{1,HNF}: \dfrac{1}{9} \cdot (4x_1 + x_2 - 8x_3 - 4) = 0$ also $-2 = \dfrac{1}{9} \cdot (4p_1 + p_2 - 8p_3 - 4) \Leftrightarrow$

$-18 = 4p_1 + p_2 - 8p_3 - 4 \Leftrightarrow 4p_1 + p_2 - 8p_3 = -14$ z.B. $p_1 = 0$, $p_2 = 2$ und $p_3 = 2$

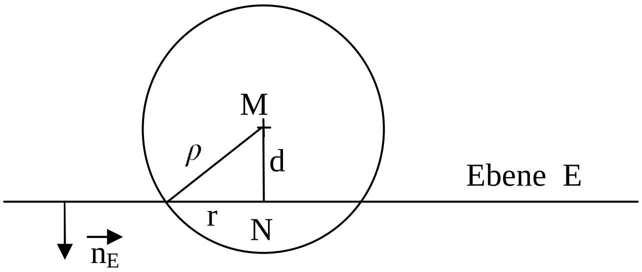
(Für P(0/2/2) gilt zudem $P \notin E_2$.)

$h: \vec{X} = \vec{P} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ d.h. $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $E_{HNF}: \frac{1}{15}\cdot\left(-2x_1-14x_2+5x_3-30\right)=0$ und damit $d(M;E)=\frac{1}{15}\cdot\left(-2\cdot 3-14+5-30\right)=-3$

also $d=3$ und nach Pythagoras gilt

$\rho^2 = r^2 + d^2 \;\Rightarrow\; r=\sqrt{5^2-3^2}=4$



$$\vec{N} = \vec{M} + d\cdot\vec{n}_E^{\,o} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + 3\cdot\frac{1}{15}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-14\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix}3-0,4\\1-2,8\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2,6\\-1,8\\2\end{pmatrix} \qquad \text{also } N(2,6/-1,8/2)$$

4. a) Wähle als Schnittpunkt von g und h den Punkt $A(1/2/3)$. Für den Richtungsvektor

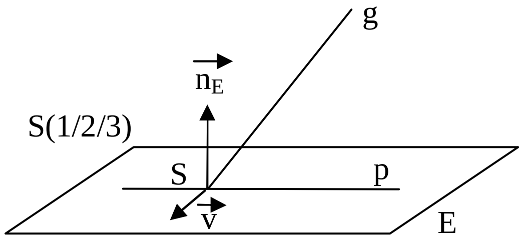
von h gilt: $\vec{v}_h \perp \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ also z.B. $\vec{v}_h = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$. Damit $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$

b) Wegen $\left|\vec{v}_h\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$ gilt für $\vec{B} = \vec{A} + \vec{v}_h = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$:

$d(B;g) = 5$; da z.B. $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \perp \vec{v}_h$ und $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} \nparallel g$ gilt ist $k: \vec{X} = \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ eine

zu g windschief liegende Gerade.

c) Für den Normalenvektor $\vec{n}_E$ von E gilt:
$\vec{n}_E$ lässt sich als Linearkombination der Richtungsvektoren von g und p darstellen und zusätzlich gilt $\vec{n}_E \perp p$.
Daraus kann man für diesen Normalenvektor



$\vec{n}_E = 5\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - 7\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\20\\18\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-3\\10\\9\end{pmatrix}$ und so $E: -3x_1+10x_2+9x_3-44=0$ ermitteln.

Einfacher aber ist es, wenn man für einen zusätzlichen Richtungsvektor von E den Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v}\perp p$ und $\vec{v}\perp g$ ermittelt.

$\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}=0$ und $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=0$. Wähle $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\v_2\\-3\end{pmatrix}$ und $3\cdot 1 + 4v_2 - 3\cdot 5 = 0$

$\Rightarrow v_2 = 3$ und somit $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$.