LK Mathematik * K13 * Aufgaben zur Normalverteilung

Aufgabe 1
Eine Maschine stellt Transistoren her, von denen durchschnittlich 5 % fehlerhaft sind.
Pro Tag werden 200 Transistoren geprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind
a) weniger als 5
b) mehr als 15
c) nicht weniger als 5 und nicht mehr als 15 geprüfte Transistoren defekt?
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten sowohl mit der Binomialverteilung als auch mit der Normalverteilung.

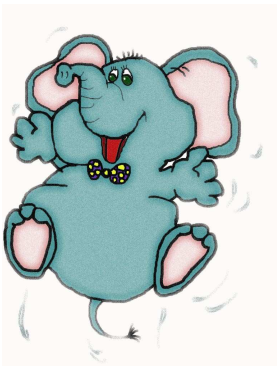
Aufgabe 2
Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Normalverteilung:

a) $P^{200}_{0,3}(X \leqq 70)$
b) $P^{500}_{0,2}(X \leqq 95)$
c) $P^{1000}_{0,4}(390 \leqq X \leqq 410)$
d) $P^{2000}_{0,3}(X \geqq 650)$
e) $P^{5000}_{0,05}(X \leqq 200)$
f) $P^{800}_{0,6}(475 \leqq X \leqq 485)$

Aufgabe 3
Eine Fertigungsmaschine produziert 10 % Ausschuss.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Charge von 1000 Stück nicht mehr als 100 Stück Ausschuss?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Ausschussrate einer Charge von 1000 Stück um nicht mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 4
Eine Grippeepidemie wird nach Einschätzung der Statistiker bei 8 % der Bevölkerung eine ärztliche Behandlung notwendig werden lassen. Ein Großhandel möchte für die Apotheken einer Kreisstadt mit 20 000 Einwohnern Behandlungsmaterialien im voraus bestellen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden maximal 1700 Patienten anfallen ?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 1500 Patienten anfallen ?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Zahl der Patienten um nicht mehr als die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Aufgabe 5
Nach einer gängigen Definition gilt ein Haushalt (HH) als arm, wenn er über weniger als 50% des Durchschnittseinkommens verfügt.
a) Wie hoch wäre der Anteil armer Haushalte, wenn die HH-Nettoeinkommen mit μ = 3000 € und σ = 1600 € normalverteilt wären?
b) Weiter die obige Verteilung unterstellt: Über welche Nettoeinkommen verfügen die 5% wohlhabendsten Haushalte mindestens?



LK Mathematik * K13 * Aufgaben zur Normalverteilung * Lösungen

1. a) $P(X<5) = P(X\le 4) = F_{0,05}^{200}(4) = 0,02645 \approx 2,6\%$

$P(X<5) = P(X\le 4) \approx \phi\left(\frac{4-200\cdot 0,05+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,05\cdot 0,95}}\right) \approx \phi(-1,78) = 1-\phi(1,78) =$

$= 1-0,96246 \approx 3,8\%$

b) $P(X>15) = 1-P(X\le 15) = 1-F_{0,05}^{200}(15) = 1-0,95564 \approx 4,4\%$

$P(X>15) = 1-P(X\le 15) \approx 1-\phi\left(\frac{15-200\cdot 0,05+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,05\cdot 0,95}}\right) \approx 1-\phi(1,78) = 3,75\%$

c) $P(5\le X\le 15) = P(X\le 15)-P(X\le 4) = F_{0,05}^{200}(15)-F_{0,05}^{200}(4) = 0,95564-0,02645 \approx 92,9\%$

$P(5\le X\le 15) = P(X\le 15)-P(X\le 4) \approx \phi\left(\frac{15-200\cdot 0,05+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,05\cdot 0,95}}\right)-\phi\left(\frac{4-200\cdot 0,05+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,05\cdot 0,95}}\right) \approx$

$\approx \phi(1,78)-\phi(-1,78) = 2\cdot\phi(1,78)-1 = 2\cdot 0,96246-1 \approx 92,5\%$

2. a) $P_{0.3}^{200}(X\le 70) \approx \phi\left(\frac{70-200\cdot 0,3+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,3\cdot 0,7}}\right) \approx \phi(1,62) = 0,94738 \approx 94,7\%$

b) $P_{0.2}^{500}(X\le 95) \approx \phi\left(\frac{95-200\cdot 0,2+0,5}{\sqrt{200\cdot 0,2\cdot 0,8}}\right) \approx \phi(-0,50) = 1-\phi(0,50) = 1-0,69146 \approx 30,9\%$

c) $P_{0.4}^{1000}(390\le X\le 410) \approx \phi\left(\frac{410-1000\cdot 0,4+0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,4\cdot 0,6}}\right)-\phi\left(\frac{390-1000\cdot 0,4-0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,4\cdot 0,6}}\right) \approx$

$\phi(0,68)-\phi(-0,68) = 2\cdot\phi(0,68)-1 = 2\cdot 0,75175-1 \approx 50,4\%$

d) $P_{0.3}^{2000}(X\ge 650) = 1-P_{0.3}^{2000}(X\le 649) \approx 1-\phi\left(\frac{649-2000\cdot 0,3+0,5}{\sqrt{2000\cdot 0,3\cdot 0,7}}\right) \approx 1-\phi(2,42)$

$= 1-0,99224 \approx 0,8\%$

e) $P_{0.05}^{5000}(X\le 200) \approx \phi\left(\frac{200-5000\cdot 0,05+0,5}{\sqrt{5000\cdot 0,05\cdot 0,95}}\right) \approx \phi(-3,21) = 1-\phi(3,21) =$

$1-0,99933633 \approx 0,07\%$

f) $P_{0.6}^{800}(475\le X\le 485) \approx \phi\left(\frac{485-800\cdot 0,6+0,5}{\sqrt{800\cdot 0,6\cdot 0,4}}\right)-\phi\left(\frac{475-800\cdot 0,6-0,5}{\sqrt{800\cdot 0,6\cdot 0,4}}\right) \approx$

$\phi(0,40)-\phi(-0,40) = 2\cdot\phi(0,40)-1 = 2\cdot 0,65542-1 \approx 31,1\%$

3. a) $P_{0,1}^{1000}(X\le 100) \approx \phi\left(\frac{100-1000\cdot 0,1+0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,1\cdot 0,9}}\right) \approx \phi(0,05) = 0,51994 \approx 52,0\%$

b) $P_{0,1}^{1000}(|X-\mu|\le\sigma) \approx 2\cdot\phi\left(\frac{\sigma+0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,1\cdot 0,9}}\right)-1 = 2\cdot\phi\left(\frac{\sqrt{1000\cdot 0,1\cdot 0,9}+0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,1\cdot 0,9}}\right)-1 =$

$2\cdot\phi(1,05)-1 = 2\cdot 0,85313-1 \approx 70,6\%$

4. a) $P_{0.08}^{20000}(X \le 1700) \approx \phi\left(\frac{1700-20000\cdot 0,08+0,5}{\sqrt{20000\cdot 0,08\cdot 0,92}}\right) \approx \phi(2,62) = 0,99560 \approx 99,6\%$

b) $P_{0.08}^{20000}(X \ge 1500) = 1 - P_{0.08}^{20000}(X \le 1499) \approx 1-\phi\left(\frac{1499-20000\cdot 0,08+0,5}{\sqrt{20000\cdot 0,08\cdot 0,92}}\right) \approx$

$1-\phi(-2,62) = \phi(2,62) \approx 99,6\%$

c) $P_{0,08}^{20000}(|X-\mu| \le \sigma) \approx 2\cdot\phi\left(\frac{\sigma+0,5}{\sigma}\right)-1 = 2\cdot\phi\left(\frac{\sqrt{20000\cdot 0,08\cdot 0,92}+0,5}{\sqrt{20000\cdot 0,08\cdot 0,92}}\right)-1 =$

$2\cdot\phi(1,01)-1 = 2\cdot 0,84375-1 \approx 68,8\%$

5. a) $P_p^n(X < \frac{1}{2}\cdot\mu) \approx \phi\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\mu-\mu-0,5}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{-\frac{1}{2}\cdot\mu-0,5}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{-\frac{1}{2}3000-0,5}{1600}\right) \approx \phi(-0,94) =$

$1-\phi(0,94) = 1-0,82639 \approx 17,4\%$

b) gesucht ist k mit $0,05 = P(X \ge k)$ d.h $0,05 = 1 - P(X < k) \Leftrightarrow P(X < k) = 0,95 \Leftrightarrow$

$\phi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \approx 0,95 \Leftrightarrow \frac{k-\mu}{\sigma} = 1,6449$ (Tabelle Seite 61) $\Leftrightarrow k = 1,6449\cdot\sigma+\mu \Leftrightarrow$

$k = 1,6449\cdot 1600€ + 3000€ \approx 5632€$

Die 5% der wohlhabendsten Haushalte verfügen demnach über mindestens 5632 € an Nettoeinkommen.