LK Mathematik * K13 * Analytische Geometrie * Skalarprodukt

1. Ein Skalarprodukt kann durch die so genannten Strukturkonstanten festgelegt werden. Prüfen Sie jeweils, ob tatsächlich ein Skalarprodukt vorliegt.

   a) $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = 1$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = 2$; $\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = 3$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 2$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 = 1$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = 0$

   b) $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = 2$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = 2$; $\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = 2$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 1$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 = 1$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = 1$

   c) $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = 1$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = 2$; $\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = 1$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 2$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 = 0$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = 0$

2. Prüfen Sie, ob die folgende Koordinatendarstellung ein Skalarprodukt beschreibt.

   a) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

   b) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 2a_1b_1 + a_1b_2 + 3a_2b_2 + a_3b_3$$

   c) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 3a_1b_1 + 2(a_1b_2 + a_2b_1) + 4a_2b_2 + 5a_3b_3$$

   d) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 4a_1b_1 + 2(a_1b_3 + a_3b_1) + 2a_3b_3$$

3. a) Durch $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = 1$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = 2$; $\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = 3$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = 1$; $\vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 = 0$; $\vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = 0$ ist ein Skalarprodukt festgelegt. Zeigen Sie das!

   b) Bestimmen Sie die Länge der beiden Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ und $\vec{b} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

   c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

4. Verwenden Sie im Folgenden das Standardskalarprodukt im R^3.

   a) Bestimmen Sie die Seitenlängen und Winkel im Dreieck ABC mit A(1/2/3) B(5/5/3) und C(3/4/4).

   b) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der durch die Punkte A, B und C festgelegten Ebene E steht.

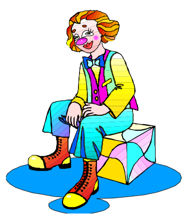
   c) Finden Sie einen Punkt P, der von der Ebene E den Abstand $d = 2 \cdot \sqrt{29}$ hat.

   d) Ermitteln Sie alle Vektoren, die senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ stehen.

   e) Ermitteln Sie einen Vektor, der senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ steht und zusätzlich in der Ebene E liegt.

   f) Die Höhe h_c im Dreieck ABC schneidet AB im Fußpunkt F. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes F.

   g) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.



LK Mathematik * K13 * Analytische Geometrie * Skalarprodukt * Lösungen

1. a) $\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 \cdot 1 + a_2^2 \cdot 2 + a_3^2 \cdot 3 + 2a_1a_2 \cdot 2 + 2a_1a_3 \cdot 1 + 2a_2a_3 \cdot 0 =$

$a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + 4a_1a_2 + 2a_1a_3$ lässt sich nicht als Summe von Quadraten schreiben.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 6 - 8 = -2 < 0$,

also handelt es sich nicht um ein Skalarprodukt!

b) $\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 \cdot 2 + a_2^2 \cdot 2 + a_3^2 \cdot 2 + 2a_1a_2 \cdot 1 + 2a_1a_3 \cdot 1 + 2a_2a_3 \cdot 1 =$

$2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 + a_3)^2 + (a_2 + a_3)^2$

Es handelt sich um ein Skalarprodukt, denn es gilt $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$ und

$\vec{a} \circ \vec{a} = 0 \Leftrightarrow$ (1) $a_1 = -a_2$ und (2) $a_1 = -a_3$ und (3) $a_2 = -a_3 \Leftrightarrow$

$a_2 = a_3$ und $a_2 = -a_3 \Rightarrow a_3 = -a_3$ d.h. $a_3 = 0$ und damit $a_2 = 0$ und $a_1 = 0$

c) Es handelt sich nicht um ein Skalarprodukt! Z.B.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3 - 4 = -1 < 0$

2. a) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 + a_3^2 = (a_1 + a_2)^2 + a_3^2 \geq 0$

Aber $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1-1)^2 + 0^2 = 0$; also kein Skalarprodukt!

b) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 2a_1b_1 + a_1b_2 + 3a_2b_2 + a_3b_3$ liefert kein Skalarprodukt, denn zum

„gemischten“ Term a_1b_2 fehlt der symmetrische Term a_2b_1 , d.h. das K-Gesetz ist nicht erfüllt! Z.B.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 9$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 = 8$

c) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 3a_1^{\ 2} + 2(a_1 a_2 + a_2 a_1) + 4a_2^{\ 2} + 5a_3^{\ 2} = (a_1 + 2a_2)^2 + 2a_1^{\ 2} + 5a_3^{\ 2} \geq 0$ und

$\vec{a} \circ \vec{a} = 0 \iff (a_1 + 2a_2)^2 + 2a_1^{\ 2} + 5a_3^{\ 2} = 0 \iff a_1 = 0$ und $a_3 = 0$ und $a_2 = -\frac{1}{2} a_1 = 0$

$\iff \vec{a} = \vec{0}$ also handelt es sich um ein Skalarprodukt.

d) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 4a_1^{\ 2} + 2(a_1 a_3 + a_3 a_1) + 2a_3^{\ 2} = (2a_1 + a_3)^2 + a_3^{\ 2} \geq 0$

Trotzdem liegt kein Skalarprodukt vor, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

3. a) $\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^{\ 2} + 2a_2^{\ 2} + 3a_3^{\ 2} + 2a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 + a_2^{\ 2} + 3a_3^{\ 2} \geq 0$ und

$\vec{a} \circ \vec{a} = 0 \iff a_2 = 0$ und $a_3 = 0$ und $a_1 = -a_2 = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$

b) $\vec{a} \circ \vec{a} = (3+4)^2 + 4^2 + 3 \cdot (-2)^2 = 77$ also $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{77}$

$\vec{b} \circ \vec{b} = (1-2)^2 + (-2)^2 + 3 \cdot 3^2 = 32$ also $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$

c) $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = -33$

$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{-33}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{32}} = -0{,}66480394\ldots \Rightarrow \varphi = 131{,}66728\ldots^{\circ} \approx 131{,}67^{\circ}$

4. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$; $a = ... = \sqrt{6}$; $b = ... = 3$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{-4-2+1}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{-5}{3 \cdot \sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 132{,}88^\circ$$

analog $\alpha \approx 21{,}04^\circ$ und $\beta \approx 26{,}08^\circ$

b) $\vec{v} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4v_1 + 3v_2 = 0$ und $2v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$ z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$ und z.B. $\vec{P} = \vec{A} + \frac{2 \cdot \sqrt{29} \cdot \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$; P(7/-6/7)

d) $\vec{v} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{w} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in R$ gibt alle zu $\overrightarrow{AB}$ senkrechten Vektoren an.

e) $\vec{u} \perp \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 \cdot (4r+2s) + 3 \cdot (3r+2s) + 0 \cdot s = 0 \Rightarrow$

$25r + 14s = 0$ z.B. $r = -14$ und $s = 25$ und damit $\vec{u} = -14 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 25 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 25 \end{pmatrix}$

f) $\{F\} = g \cap AB$ mit $g\colon \vec{X} = \vec{C} + t \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 25 \end{pmatrix}$ und $AB\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{25} \text{ und } k = 0{,}56 \quad \text{d.h. } F(3{,}24/3{,}68/3)$$

g) $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{0{,}24^2 + 0{,}32^2 + 1^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{1{,}16} = \frac{5 \cdot 2 \cdot \sqrt{29}}{2 \cdot 10} = 0{,}5 \cdot \sqrt{29}$