

## LK Mathematik \* K13 \* Aufgaben zur Substitutionsmethode

Aus der Kettenregel  $[F(g(x))]’ = F’(g(x)) \cdot g’(x)$  folgt mit  $F’(x) = f(x)$  die **Substitutionsregel**

$$\int f(g(x)) \cdot g’(x) dx = \int [F(g(x))]’ dx = F(g(x)) + C$$

### Beispiel 1:

$$\int 2x \cdot (x^2 - 1)^2 dx = \int (x^2 - 1)^2 \cdot 2x dx = \int (g(x))^2 \cdot g’(x) dx = \frac{1}{3}(g(x))^3 + C = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^3 + C$$

also gilt hier  $F(x) = x^3$  und  $g(x) = x^2 - 1$ .

Formal löst man die Aufgabe durch Substitution:

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = 2x \quad \text{also} \quad dz = 2x dx ; \quad \text{nun „basteln“ wir den Integranden neu}$$

$$\text{zusammen:} \quad \int (x^2 - 1)^2 \cdot 2x dx = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3}(x^2 - 1)^3 + C$$

### Beispiel 2:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2 + 5x^2}} dx ; \quad z = \sqrt{2 + 5x^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 2x}{\sqrt{2 + 5x^2}} = \frac{5x}{\sqrt{2 + 5x^2}}$$

$$\text{also} \quad \sqrt{2 + 5x^2} \cdot dz = 5x \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{5} z dz = x dx \quad \text{und daher}$$

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2 + 5x^2}} dx = \int \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{5} z dz = \int \frac{3}{5} dz = \frac{3}{5} z + C = 0,6 \cdot \sqrt{2 + 5x^2} + C$$

### Aufgaben:

1.  $\int x^2 \cdot e^{-x^3} dx$

2.  $\int \frac{e^x}{2 - e^x} dx$

3.  $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

4.  $\int \sqrt{5 - 2x} dx$

5.  $\int (e^{5-3x})^2 dx$

6.  $\int \frac{1}{\tan(x)} dx$  [ Substitution:  $z = \sin(x)$  ]

7.  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

8.  $\int e^x \sqrt{e^x + 1} dx$

9.  $\int \frac{e^x (e^x + 1)}{2 + e^x} dx$

10.  $\int 3x \cdot \sqrt{4 - x^2} dx$

11.  $\int \frac{1-x}{1+x} dx$

12.  $\int \sqrt[4]{3+x} dx$

13.  $\int \frac{2 + \ln(x)}{5x} dx$

14.  $\int \frac{2}{3 + \sqrt{x}} dx$

