

LK Mathematik * K13 * Aufgaben zur partiellen Integration

Aus der Produktregel $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ folgt

$$u(x) \cdot v(x) + C = \int [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \text{ und daraus}$$

die Formel zur **partiellen Integration**

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Beispiel 1:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 + C$$

also hier $u'(x) = x$ d.h. $u(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ und $v(x) = \ln(x)$ mit $v'(x) = \frac{1}{x}$

Beispiel 2 („Trick mit Faktor 1“):

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

Beispiel 3 („Trick Reproduktion“):

$$\begin{aligned} \int (\sin(x))^2 dx &= -\cos(x) \cdot \sin(x) - \int -\cos(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int 1 - (\sin(x))^2 dx \\ &= -\cos(x) \cdot \sin(x) + x - \int (\sin(x))^2 dx \Rightarrow 2 \cdot \int (\sin(x))^2 dx = -\cos(x) \cdot \sin(x) + x + C \Rightarrow \\ \int (\sin(x))^2 dx &= -\frac{1}{2} \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

Aufgaben:

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\int x \cdot e^x dx$ | 2. $\int 2x \cdot e^{-x} dx$ |
| 3. $\int \sqrt{x} \cdot \ln(x) dx$ | 4. $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ |
| 5. $\int (2x-3) \cdot e^{x+1} dx$ | 6. $\int (x+1) \cdot e^{2x} dx$ |
| 7. $\int (2x-3) \cdot \ln(x) dx$ | 8. $\int x^2 \cdot \ln(x) dx$ |
| 9. $\int \frac{4x+5}{2e^x} dx$ | 10. $\int \frac{x+1}{e^{3x}} dx$ |
| 11. $\int \sin(x) \cdot e^x dx$ | 12. $\int \cos(x) \cdot e^x dx$ |
| 13. $\int \log_5(x) dx$ | 14. $\int \frac{x}{2^x} dx$ |

