LK Mathematik * Wichtige Begriffe der Stochastik aus der K12

Beispiel **Zufallsexperiment** „Wurf zweier Würfel“
Ergebnismenge $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), ..., (6,6)\}$
Mächtigkeit von Ω: $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ gibt die Anzahl der Elemente von Ω an.
Ereignisse E sind Teilmengen von Ω. Z.B. E = „Pasch“ = $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

Wahrscheinlichkeitsmaß P ordnet jedem Ereignis E eines Ereignisraums eine reelle Zahl zu, wobei für alle Ereignisse A, B gilt:
(I) $P(A) \geq 0$ und (II) $P(\Omega) = 1$ und (II) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ falls $A \cap B = \{\}$

Das **Laplace-WK-Maß** wird festgelegt durch $P(E) = \dfrac{|E|}{|\Omega|}$

Eine **Zufallsgröße X** ordnet jedem Ergebnis ω eine reelle Zahl zu.
Beispiel: X = „Augensumme“ , d.h. z.B. $X(\{2,5\}) = 7$
Mit dieser Zufallsgröße kann man Ereignisse bilden:
A = „Augensumme 9“ = $\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ Man schreibt $P(A) = P(X=9) = 4/36 = 1/9$

Die **WK-Funktion W** der Zufallsgröße X ordnet jeder reellen Zahl x den Wert $P(X = x)$ zu.
$W: \ R \ni x \mapsto W(x) = P(X = x) \in [0;1]$
WK-Funktionen stellt man meist als Histogramme oder Stabdiagramme dar.

Die (kumulative) **Verteilungsfunktion F** ist festgelegt durch:
$F: \ R \ni x \mapsto F(x) = P(X \leq x) \in [0;1]$ (F ist eine monoton steigende Treppenfunktion)
Erwartungswert E(X) und **Varianz Var(X)** sind Maßzahlen der Zufallsgröße X :

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) \quad \text{und} \quad Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var(X)}$
Mit Zufallsgrößen X und Y lassen sich neue Zufallsgrößen bilden (a, b $\in$ R):
$Z_1 = X + Y: \ \Omega \ni \omega \mapsto a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega) \in R$ oder $Z_2 = X \cdot Y: \ \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \cdot Y(\omega) \in R$

oder die **standardisierte Zufallsgröße** T : $\Omega \ni \omega \mapsto T(\omega) = \dfrac{X(\omega) - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \in R$

Für T gilt $E(T) = 0$ und $Var(T) = 1$.

Für Erwartungswert und Varianz gelten folgende **Gesetzmäßigkeiten**:

$E(aX + bY) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$
$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (oft benötigt für einfachere Berechnung von Var(X))
$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$

Sind **X und Y stochastisch unabhängig**, dann gilt zusätzlich:

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ und $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Hierbei heißen X und Y stochastisch unabhängig, wenn gilt:
$P(X = x \text{ und } Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$

Ungleichung von Tschebyschow zur groben Abschätzung: $P\left(|X - E(X) \geq \alpha|\right) \leq \dfrac{Var(X)}{\alpha^2}$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ [„WK von A unter der Bedingung B“]

Formel von Bayes: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P_B(A) \cdot P(B)}{P_B(A) \cdot P(B) + P_{\overline{B}}(A) \cdot P(\overline{B})}$