LK M * Zwei Aufgaben zur Tschebyschow-Ungleichung

1. In einer Urne befinden sich 4 Kugeln.
   Zwei tragen die Aufschrift 1, die beiden anderen dagegen die Aufschrift 2 und 6.
   Anton zieht (ohne Zurücklegen) zwei der Kugeln und erhält die Differenz als Gewinn in Euro ausgezahlt.

   a) Welchen Einsatz sollte Anton zahlen, damit das Spiel fair ist?

   Anton muss im Folgenden pro Spiel 3 € Einsatz zahlen.

   b) Welchen durchschnittlichen Reingewinn erwartet Anton jetzt pro Spiel?
      Berechnen Sie auch die Varianz und die Standardabweichung des Reingewinns?

   c) Anton spielt das Spiel insgesamt 90 Mal.
      Berechnen Sie für den Gesamtreingewinn den Erwartungswert und die Varianz.
      Schätzen Sie mit der Ungleichung von Tschebyschow die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der „Reingewinn" um mindestens 30 € vom Erwartungswert abweicht.

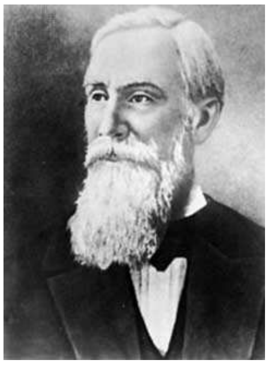
   d) Wie oft muss Anton mindestens spielen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% sein durchschnittlicher „Reingewinn" um weniger als 0,20 € vom erwarteten, mittleren Reingewinn abweicht?
      Schätzen Sie diese Anzahl mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow ab.

2. Eine Firma verkauft für 1200 € ein Gerät, bei dem zwei Teile T_1 und T_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 10\%$ und $p_2 = 5\%$ (unabhängig voneinander) während der Garantiezeit ausfallen. Die Reparatur von T_1 kostet 50 €, die von T_2 dagegen 200 €.

   a) Welcher Anteil der Gerätekosten ist durchschnittlich für die Reparatur zu veranschlagen? Bestimmen Sie die Standardabweichung für die Reparaturkosten.

   b) Schätzen Sie geeignet ab, mit welcher Wahrscheinlichkeit man beim Verkauf von 1000 Geräten damit zu rechnen hat, dass die Reparaturkosten mehr als 2000 € vom erwartet Wert abweichen.

   c) Die anfallenden durchschnittlichen Reparaturkosten sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als 20 € vom Erwartungswert abweichen.
      Wie viele Geräte muss die Firma dafür mindestens verkaufen?
      (Abschätzung mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschow.)



Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow
(1821 – 1894)

Aufgaben aus dem Buch:

S. 143 /	118	$p \geq 88\%$
	119 a)	$p \geq 93{,}75\% \approx 94\%$
	119 b)	$p \geq 93{,}75\% \approx 94\%$
	120	$n \geq 80$
	121 a)	$p \geq 83{,}3\%$
	121 b)	$n \geq 730$
S. 144 /	122 a)	$E(X) = 0{,}375$ DM
	122 b)	$Var(X) = 40{,}944375\ DM^2$
	122 c)	$n \geq 819$
	123	$n \geq 80$

LK M * Zwei Aufgaben zur Tschebyschow-Ungleichung * Lösungen

1. a) X = „Gewinn in € ohne Einsatz“

x	0	1	4	5
P(X = x)	1/6	2/6	1/6	2/6

$E(X) = \frac{8}{3}$

Spiel ist fair bei einem Einsatz von 8/3 Euro.

b) Y = „Reingewinn in € mit Einsatz“ , d.h. Y = X – 3

$E(Y) = E(X) = \frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$ und $Var(Y) = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{68}{6} - \frac{64}{9} = \frac{38}{9}$

$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\sqrt{38}}{3} \approx 2{,}05$

c) $Z = Y_1 + ... + Y_{90}$; $E(Z) = 90 \cdot E(Y) = -30$ und $Var(Z) = 90 \cdot Var(Y) = 380$;

$\sigma_Z = 2\sqrt{95} \approx 19{,}5$; $P(|Z - E(Z)| \geq 30) \leq \frac{Var(Z)}{30^2} = \frac{380}{900} \approx 42\%$

d) $\overline{Z} = \frac{Z}{n}$; $E(\overline{Z}) = E(Y) = -\frac{1}{3}$ und $Var(\overline{Z}) = \frac{Var(Z)}{n^2} = \frac{n \cdot Var(Y)}{n^2} = \frac{Var(Y)}{n} = \frac{38}{9 \cdot n}$

es gilt $P(|\overline{Z} - E(\overline{Z})| < 0{,}20) \geq 1 - \frac{Var(\overline{Z})}{0{,}20^2}$, d.h. $P(|\overline{Z} - E(\overline{Z})| < 0{,}20) \geq 90\%$ ist erfüllt,

falls $1 - \frac{Var(\overline{Z})}{0{,}20^2} \geq 90\%$ gilt. $1 - \frac{Var(\overline{Z})}{0{,}20^2} \geq 90\% \Leftrightarrow 0{,}1 \cdot 0{,}04 \geq Var(\overline{Z}) \Leftrightarrow$

$0{,}004 \geq \frac{38}{9n} \Leftrightarrow n \geq \frac{38}{9 \cdot 0{,}004} = 1055{,}5...$ also $n \geq 1056$.

2. a) X = „Reparaturkosten in €“

x	0	50	200	250
P(X = x)	0,855	0,095	0,045	0,005

$E(X) = 15$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2350 - 225 = 2125$ und $\sigma_X = \sqrt{2125} \approx 46{,}1$

b) $Y = X_1 + ... + X_{1000}$; $E(Y) = 1000 \cdot E(X) = 15000$; $Var(Y) = 1000 \cdot Var(X) = 2125000$

$P(|Y - E(Y)| > 2000) < \frac{Var(Y)}{2000^2} = \frac{2125000}{4000000} \approx 53\%$

c) $Z = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$; $E(Z) = E(X) = 15$ und $Var(Z) = \frac{n \cdot Var(X)}{n^2} = \frac{2125}{n}$

Es gilt $P(|Z - E(Z)| < 20) \geq 1 - \frac{Var(Z)}{20^2}$; daher ist die Ungleichung

$P(|Z - E(Z)| < 20) \geq 95\%$ erfüllt, falls gilt $1 - \frac{Var(Z)}{20^2} \geq 95\% \Leftrightarrow$

$0{,}05 \geq \frac{Var(Z)}{400} \Leftrightarrow 20 \geq \frac{2125}{n} \Leftrightarrow n \geq \frac{2125}{20} = 106{,}25$ also $n \geq 107$