LKM * K13 * Typische Aufgaben zum Standardskalarprodukt im R^3

1. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E , die von der Geraden AB senkrecht im Punkt A geschnitten wird. Es gelte A(1/2/3) und B(5/-1/1).

2. Gegeben ist die Ebene E im R^3 mit $\quad E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g, die die Ebene E senkrecht schneidet.
   b) Bestimmen die die Koordinatenform der Ebene E.
   (Vergleichen Sie mit dem Richtungsvektor von g! Was fällt auf?)

3. Im R^3 sind die drei Punkte A(1/2/-3), B(7/5/3) und C(1/-1/3) gegeben.

   a) Bestimmen Sie die drei Seitenlängen im Dreieck ABC.
   b) Bestimmen Sie die drei Innenwinkel im Dreieck ABC.
   c) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von C auf die Seite [AB].
   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

4. Im R^3 sind die drei Punkte A(1/2/3), B(3/2/4) und C(5/5/4) gegeben.
   a) Geben Sie die Gleichung der durch die drei Punkte A, B und C festgelegten Ebene E an.
   b) Bestimmen Sie einen Punkt, der von der Ebene E den Abstand 14 hat.
   c) Geben Sie eine Gerade g an, die im Abstand 7 parallel zur Ebene E verläuft.

5. Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit

$$g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   a) Begründen Sie, dass g und h parallel zueinander liegen.
   b) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden voneinander!

6. Im R^3 ist eine Kugel $K(M_1;r_1)$ mit dem Mittelpunkt $M_1(1/2/3)$ und dem Radius $r_1 = 3$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie mindestens 2 verschiedene Punkte A und B, die auf der Kugel liegen.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene E zur Kugel im Punkt A.
   c) Begründen Sie, dass sich die Kugel $K(M_1;r_1)$ mit der Kugel $K(M_2;r_2)$ in einem Kreis $k(M;r)$ schneidet, wenn gilt $M_2(2/4/1)$ und $r_2 = 3$.
   d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r des Schnittkreises $k(M;r)$.

LKM * K13 * Typische Aufgaben zum Standardskalarprodukt im R^3 * Lösungen

1. Gerade AB: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$ und z.B. E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

2. a) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$; also z.B. g: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

   b) E: $+1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - 3\cdot x_3 + 4 = 0$; die Koeffizienten bei x_1, x_2 und x_3 stimmen mit den Koordinaten des Richtungsvektors von g überein.

3. a) $\overline{AB} = 9$; $\overline{AC} = 3\cdot\sqrt{5}$; $\overline{BC} = 6\cdot\sqrt{2}$

   b) $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4^\circ$; $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow ß = 45^\circ$; $\cos(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \gamma \approx 71{,}6^\circ$;

   c) $F(3/3/-1)$

   d) $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CF} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{2^2+4^2+4^2} = 27$

4. a) z.B. E: $\vec{X} = \vec{A} + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AC}$ also E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

   b) $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} \perp \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ gilt z.B. für $\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}$; $\vec{n}^{\,o} = \dfrac{\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}$

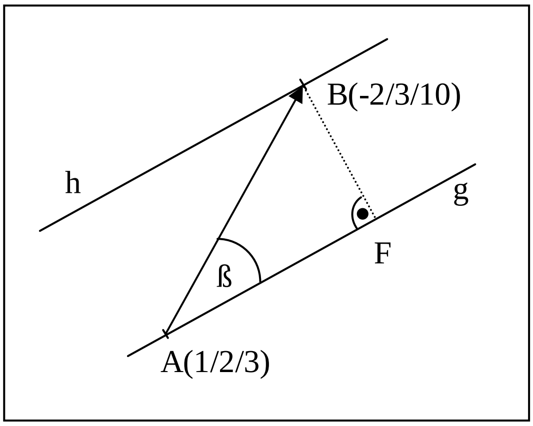
   z.B. $\vec{P} = \vec{A} + 14\cdot\vec{n}^{\,o} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 14\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\6\\15\end{pmatrix}$, also $P(-5/6/15)$

   c) Wähle als Aufpunkt Q von g, z.B: $\vec{Q} = \vec{A} + 7\cdot\vec{n}^{\,o} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\9\end{pmatrix}$

   und wähle z.B. g || AB , d.h. dann g: $\vec{X} = \vec{Q} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\9\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

5. a) Für die Richtungsvektoren gilt $\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$, also gilt $g \parallel h$.

b) $\cos(ß) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \sqrt{16+9+4}} = \dfrac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+1+49} \cdot \sqrt{16+9+4}} = \dfrac{29}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{29}}$



(also $ß \approx 45{,}49^{\circ}$)

und $d = \overline{BF} = \overline{AB} \cdot \sin(ß) = \sqrt{59} \cdot \sin(ß) \approx 5{,}48$

Man kann aber F auch direkt ausrechnen! (Vorteil: Man erhält ein exaktes Ergebnis!)
Die Ebene E soll B enthalten und von h senkrecht geschnitten werden. Es gilt:

$E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $E \cap g = \{F\}$

nach dem Gleichsetzen folgt $t = -1$, $k = -1$ und $r = 1$ also $F(-3/5/5)$ und

$d = \overline{BF} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

6. a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ haben je die Länge 3. $\vec{A} = \vec{M}_1 + \vec{v}_1$ und $\vec{B} = \vec{M}_1 + \vec{v}_2$

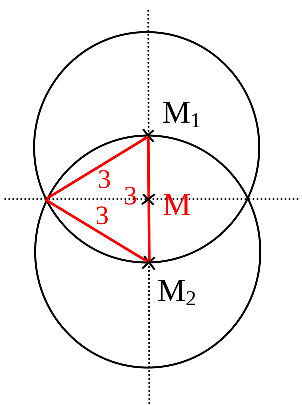
liefert damit z.B. Punkte auf der Kugel, also A(3/4/4) und B(3/4/2).

b) Der Vektor $\overrightarrow{M_1A}$ steht senkrecht auf der Tangentialebene zur Kugel im Punkt A.

Wegen $\overrightarrow{M_1A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ kann man

schreiben: $E: \ \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{w}_1 + s \cdot \vec{w}_2$ also $E: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\overline{M_1M_2} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9} = 3 < r_1 + r_2 = 6$,
d.h. die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreis.
(siehe Bild!)



d) Der Mittelpunkt M des Schnittkreises ist der Mittelpunkt der Strecke $[M_1M_2]$). Also $M = (1{,}5/3/2)$

Der Radius des Schnittkreises entspricht der Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge 3,

also $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = 1{,}5 \cdot \sqrt{3}$.