LKM K13 * Wiederholung zur Abiturvorbereitung * Binomial- und Normalverteilung

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad [\text{damit gilt auch} \quad P(B) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ ]$$

Aufgabe:
In einer Belegschaft sind 30% Brillenträger und 60 % Kaffeetrinker.
40% aller Kaffeetrinker sind Brillenträger.
a) Welcher Prozentsatz der Brillenträger trinkt Kaffee?
b) Sind die Ereignisse „Kaffeetrinker" und „Brillenträger" stochastisch unabhängig?

Binomialverteilte Zufallsgrößen

Eine Zufallsgröße X heißt binomial nach B(n,p) verteilt, wenn gilt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{mit } q = 1 - p$$

Für X gilt dann: $E(X) = n \cdot p$; $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

Und nach Tschebyschow gilt dann. $P(|X - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{n}{4\varepsilon^2}$

Die Zufallsgröße $H = \frac{X}{n}$ heißt relative Trefferhäufigkeit.

Nach Tschebyschow gilt: $P(|H - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2} \geq 1 - \frac{1}{n \cdot \varepsilon^2} \quad \to 1 \text{ für } n \to \infty$
(Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen)

$P(X = k) = B(n;p;k)$ und $P(X \leq k) = F_p^n(k)$ sind für viele n und p in Tabellen erfasst.

Laplace-Näherung für die Binomialverteilung

Gaußsche Integralfunktion $\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\tau^2}}{\sqrt{2\pi}}\, d\tau$ ist in Tabelle aufgeführt.

Es gelten (recht gut für $n \cdot p \cdot q > 9$) die **integralen Näherungen**

$$P(X \leq k) = \phi\left(\frac{k - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{k - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) \text{ und } P(|X - \mu| \leq \varepsilon) \approx 2 \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2}}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \phi\left(\frac{\varepsilon + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) - 1$$

(es gilt $\varphi(-t) = \varphi(t)$ und $\phi(-t) = 1 - \phi(t)$)

lokale Näherungsformel

$B(n;p;k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k - \mu}{\sigma}\right)$ (Werte von $\varphi(t)$ sind in Tabelle angegeben)

Aufgabe:
Ein Würfel wird 1000-mal geworfen.
Mit welcher WK liegt die Anzahl N der „6-er" im Bereich 145 < N < 170 ? Nähern Sie geeignet.