

LK Mathematik * Stochastik * Zufallsgrößen

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis ω eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsgröße**.
$$X : \Omega \ni \omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Mit der Zufallsgröße lassen sich folgendermaßen Ereignisse festlegen:

Für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $A = \{ \omega / X(\omega) = x \}$ ein Ereignis, dessen

Wahrscheinlichkeit man kurz so schreibt: $P(A) = P(X=x)$.

Analog legt man fest: $P(X \leq x) = P(\{ \omega / X(\omega) \leq x \})$

Die Funktion $W : \mathbb{R} \ni x \mapsto W(x) = P(X=x) \in [0;1]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion** (oder auch Wahrscheinlichkeitsverteilung) der Zufallsgröße X .

Die Funktion $F : \mathbb{R} \ni x \mapsto F(x) = P(X \leq x) \in [0;1]$ heißt **Verteilungsfunktion** (oder auch kumulative Verteilungsfunktion) der Zufallsgröße X .

W wird meist als „Stabdiagramm“ oder als „**Histogramm**“ dargestellt.

F ist eine monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Aufgaben:

Zufallsexperiment: Wurf zweier Laplace-Würfel

Zufallsgröße: $X =$ „Augensumme“

- Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X tabellarisch an und zeichnen Sie das zugehörige Stabdiagramm und ein Histogramm.
- Geben Sie die Werte von $P(X=3)$, $P(X=0,5)$, $P(3 < x < 6)$, $W(4)$ und $F(4)$ an.
- Geben Sie in Kurzschreibweise an P („Die Augensumme beträgt mindestens 9“) und bestimmen Sie den zugehörigen Wert.
- Zeichnen Sie den Graphen der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$.

Zu einer Zufallsgröße X kann man neue Funktionen definieren. Z.B.

$$Y : \Omega \ni \omega \mapsto \frac{X(\omega) - 7}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{oder kurz geschrieben} \quad Y = \frac{X-7}{2}$$

Y ist als **Funktion von X** ebenfalls eine Zufallsgröße;

Y ordnet jedem Ergebnis einen neuen Wert zu.

- Zeichnen Sie zu den Zufallsgrößen $Y = \frac{X-7}{2}$, $Z = \frac{(X-12)^2}{10}$ und $V = \frac{(X-7)^2}{5}$ jeweils ein Stabdiagramm.

$$\text{Warum gilt } P(V = \frac{1}{5}) = P(X=8) + P(X=6) ?$$

Sind zu einem Zufallsexperiment zwei Zufallsgrößen X und Y definiert, so nennt man

$W_{XY} : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto P(X=x \text{ und } Y=y) \in [0;1]$ die **gemeinsame WK-Funktion**.

Zur „tabellarischen“ Darstellung von W_{XY} verwendet man eine Art „Mehrfeldertafel“.

Die beiden Zufallsgrößen X und Y heißen **unabhängig** voneinander, wenn für alle

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt } P(X=x \text{ und } Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

Andernfalls heißen sie abhängig voneinander.

- Prüfen Sie, ob die Zufallsgrößen $X =$ „Augensumme“ und $Y =$ „Größere Augenzahl“ bei unserem Zufallsexperiment „Wurf zweier Laplace-Würfel“ unabhängig sind. Stellen Sie dazu W_{XY} zuerst tabellarisch dar.