# Aufgaben zur Integralrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\int_0^4 x^2+2x\ dx$ b) $\int_1^2 5-\frac{2}{x^2}\ dx$

c) $\int_0^3 \sqrt{x}\ dx$ d) $\int_1^2 (x^2+1)\cdot\sqrt{x}\ dx$

e) $\int_{-2}^4 x\cdot|x|\ dx$ f) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\ dx$

g) $\int_{-1}^2 |x^2-1|\ dx$ h) $\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2}dx$ (Zum Tüfteln!)

2. Prüfen Sie kritisch!

a) $\int_{-2}^4 \frac{1}{x}\ dx$ und $\int_{-2}^4 \frac{1}{x+3}\ dx$ b) $\int_1^4 \frac{x-2}{x^3}\ dx$ und $\int_{-1}^1 \frac{x-2}{x^3}\ dx$

c) $\int_{-2}^2 \frac{x^2-1}{x+1}\ dx$

3. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von $f$ und $g$ miteinander einschließen.

a) $f(x) = x^2-1$ und $g(x) = x+1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3-3x$ und $g(x) = -\frac{5}{3}\cdot x$

c) $f(x) = x\cdot(x-3)^2$ und $g(x) = x$

4. Bestimmen Sie den Wert von $k$ so, dass die Gleichung erfüllt ist.
Deuten Sie das Ergebnis jeweils geometrisch!

a) $\int_{-k}^k 1-x^2\ dx = 0$ b) $\int_{-k}^k 1-x^2\ dx = \frac{4}{3}$

5. Zum Tüfteln
Berechnen Sie das bestimmte Integral. Denken Sie dabei an den HDI.

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3}\ dx$ b) $\int_0^3 6x\cdot\sqrt{x^2+3}\ dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi)\ dx$ d) $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\ dx$

## Aufgaben zur Integralrechnung * Lösungen

1. a) $\int_0^4 x^2+2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}+16-0 = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$

b) $\int_1^2 5-\frac{2}{x^2}\,dx = \left[5x+\frac{2}{x}\right]_1^2 = (10+\frac{2}{2})-(5+2) = 4$

c) $\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{27}-0 = 2\cdot\sqrt{3}$

d) $\int_1^2 (x^2+1)\cdot\sqrt{x}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{7}\cdot x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 =$

$(\frac{16\sqrt{2}}{7}+\frac{4\sqrt{2}}{3})-(\frac{2}{7}+\frac{2}{3}) = \frac{76\sqrt{2}-20}{21}$

e) $\int_{-2}^4 x\cdot|x|\,dx = \int_{-2}^0 -x^2\,dx + \int_0^4 x^2\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 0-(-\frac{-8}{3})+\frac{64}{3}-0 = \frac{56}{3}$

f) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx = 2\cdot\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2\cdot[-\cos(x)]_0^{\pi} = 2\cdot[-(-1)-(-1)] = 4$

g) $\int_{-1}^2 |x^2-1|\,dx = \int_{-1}^1 1-x^2\,dx + \int_1^2 x^2-1\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 =$

$(1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3})+(\frac{8}{3}-2)-(\frac{1}{3}-1) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

h) Probeansatz: $F(x) = -\frac{2}{x+1} = -2\cdot(x+1)^{-1} \Rightarrow F'(x) = 2\cdot(x+1)^{-2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

Also $\int_2^3 \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x+1}\right]_2^3 = -\frac{2}{4}-(-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

2. a) $\int_{-2}^4 \frac{1}{x}\,dx$ existiert nicht wegen der Definitionslücke bei $x_1 = 0$ !

$\int_{-2}^4 \frac{1}{x+3}\,dx$ existiert wohl, aber wir kennen (noch) keine Stammfunktion!

b) $\int_1^4 \frac{x-2}{x^3}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)-\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right) = -\frac{3}{16}$

$\int_{-1}^1 \frac{x-2}{x^3}\,dx$ existiert nicht wegen der Definitionslücke bei $x_1 = 0$ !

c) $\int_{-2}^2 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$ existiert eigentlich nicht wegen der Definitionslücke bei $x_1 = -1$ !

Aber diese Definitionslücke ist stetig hebbar und damit gilt:

$\int_{-2}^2 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = \int_{-2}^2 \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x+1}\,dx = \int_{-2}^2 x-1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{-2}^2 = -4$

3. a) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(-1\,/\,0)$ und $S_2(2\,/\,3)$

$$A = \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,dx = \frac{10}{3} - (-\frac{7}{6}) = 4{,}5$$

b) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(-2\,/\,\frac{10}{3})$ , $S_2(0\,/\,0)$ und $S_3(2\,/-\frac{10}{3})$

Wegen der Punktsymmetrie beider Graphen bezüglich des Ursprungs gilt:

$$A = 2\cdot\int_{0}^{2} g(x) - f(x)\,dx = 2\cdot\left[\frac{2x^2}{3} - \frac{x^4}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

c) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(0\,/\,0)$ , $S_2(2\,/\,2)$ und $S_3(4\,/4)$

$$A = \int_0^2 f(x) - g(x)\,dx + \int_2^4 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x\,dx + \int_2^4 -x^3 + 6x^2 - 8x\,dx =$$

$$\int_0^2 x^3 - 6x^2 + 8x\,dx + \int_2^4 -x^3 + 6x^2 - 8x\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\right]_2^4 =$$

$$(4-0) + (0-(-4)) = 8$$

4. a) $$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-k}^{k} = \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\,dx = 0 \iff \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} = 0 \iff k_1 = 0 \text{ oder } k_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

b) $$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-k}^{k} = \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} \quad \text{d.h.}$$

$$\int_{-k}^{k} 1 - x^2\,dx = \frac{4}{3} \iff \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} = \frac{4}{3} \iff k\cdot(3-k^2) = 2 \iff k^3 - 3k + 2 = 0 \iff$$

durch Faktorisieren: $k^3 - 3k + 2 = 0 \iff (k-1)\cdot(k^2 + k - 2) = 0 \iff$

$$k_1 = 1 \text{ oder } k_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}) = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \quad \text{d.h.} \quad k_2 = -2 \text{ und } k_3 = k_1 = 1$$

5. Alle Stammfunktionen findet man durch Probieren!

a) $$\int_0^3 \sqrt{2x+3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 9 - \sqrt{3}$$

b) $$\int_0^3 6x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx = \left[2\cdot\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 2\cdot 12\cdot\sqrt{12} - 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 42\cdot\sqrt{3}$$

c) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x-\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}\cdot 1) = \frac{1}{4}$$

d) $$\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx = \left[\frac{3}{2}\cdot(4x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5} - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5} - \frac{3}{2}$$