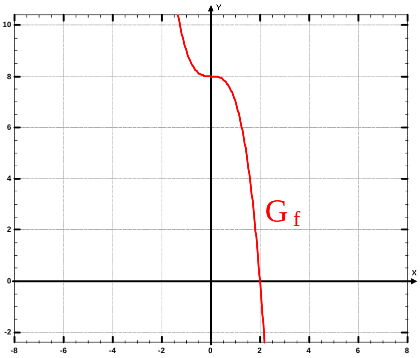
1. Klausur im LK Mathematik am 15.11.2006

1. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 8 - x^3$ schließt mit der x-Achse und der y-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A ein. (Siehe Bild!)

   a) Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A.

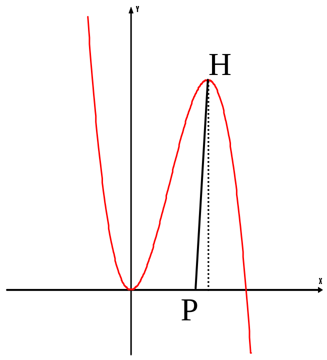
   b) Bestimmen Sie nun A mit Hilfe der Streifenmethode. Berechnen Sie dazu nur die Ober- <u>oder</u> die Untersumme und führen Sie anschließend die erforderliche Grenzwertbetrachtung durch.



2. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot (6 - x)$ schließt mit der positiven x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A ein. (Siehe nicht maßstäbliches Bild!)

   a) Berechnen Sie diesen Flächeninhalt A.

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H. Ermitteln Sie nun den Punkt $P(x_P\,;0)$ auf der x-Achse so, dass die Strecke [HP] die in a) berechnete Fläche genau halbiert! (Teilergebnis: H(4;32))



3. Lösen Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

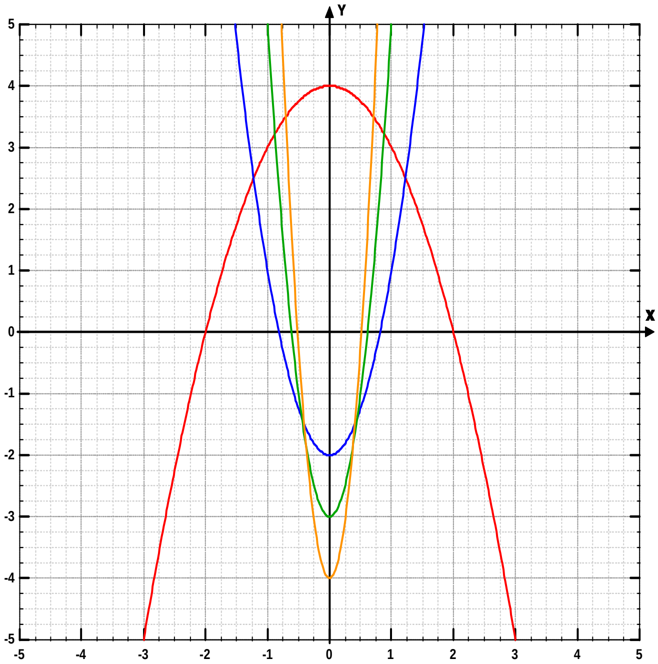
4. Gegeben sind die Funktion

   $g(x) = 4 - x^2$

   und die Funktionenschar

   $f_k(x) = (k^2 - 1) \cdot x^2 - k$ mit $k > 1$.

   (Siehe Bild!)
   Die Graphen von f_k werden vereinfachend mit G_k bezeichnet.



   a) Für welche Werte von k sind Graphen G_k im Bild eingetragen?

   b) Die Graphen G_k schließen mit dem Graphen G_g der Funktion g eine Fläche mit dem Inhalt $A(k)$ ein. Bestimmen Sie diesen Flächeninhalt A(k).

   (Ergebnis: $A(k) = \dfrac{4 \cdot (4+k)^{\frac{3}{2}}}{3k}$)

   c) Für ein bestimmtes k wird dieser Flächeninhalt $A(k)$ minimal. Bestimmen Sie dieses k und den minimalen Flächeninhalt! (Der Nachweis dafür, dass es sich um ein Minimum handelt, ist nicht verlangt!)

Aufgabe	1a	b	2a	b	3a	b	4a	b	c	Σ
Punkte	3	9	3	9	5	5	2	7	7	50

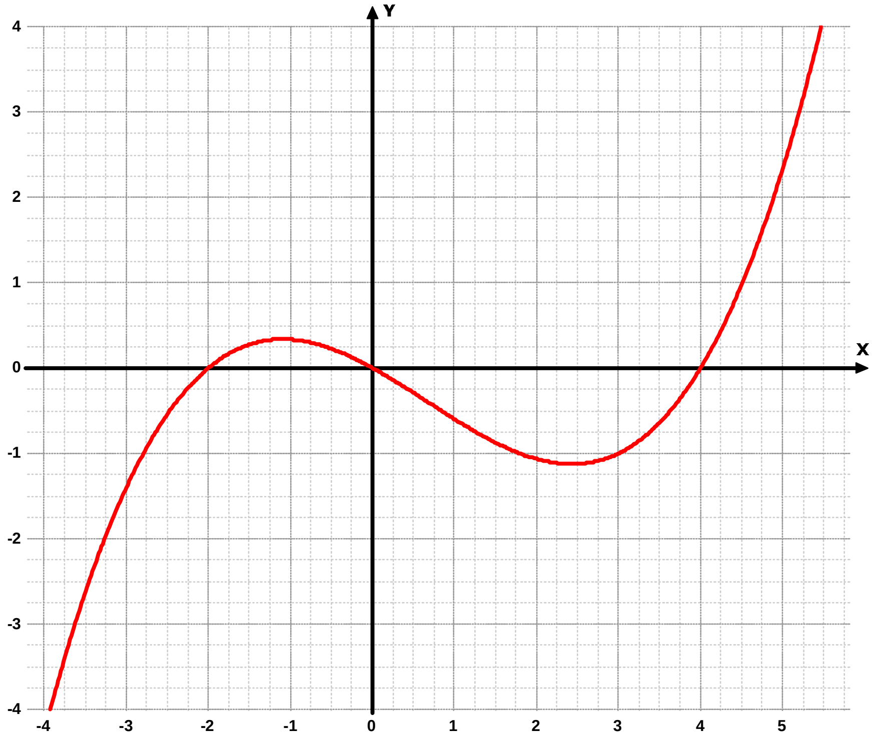
Gutes Gelingen! G.R.

Arbeitsblatt zur 1. Klausur im LK Mathematik am 15.11.2006

Name: ....

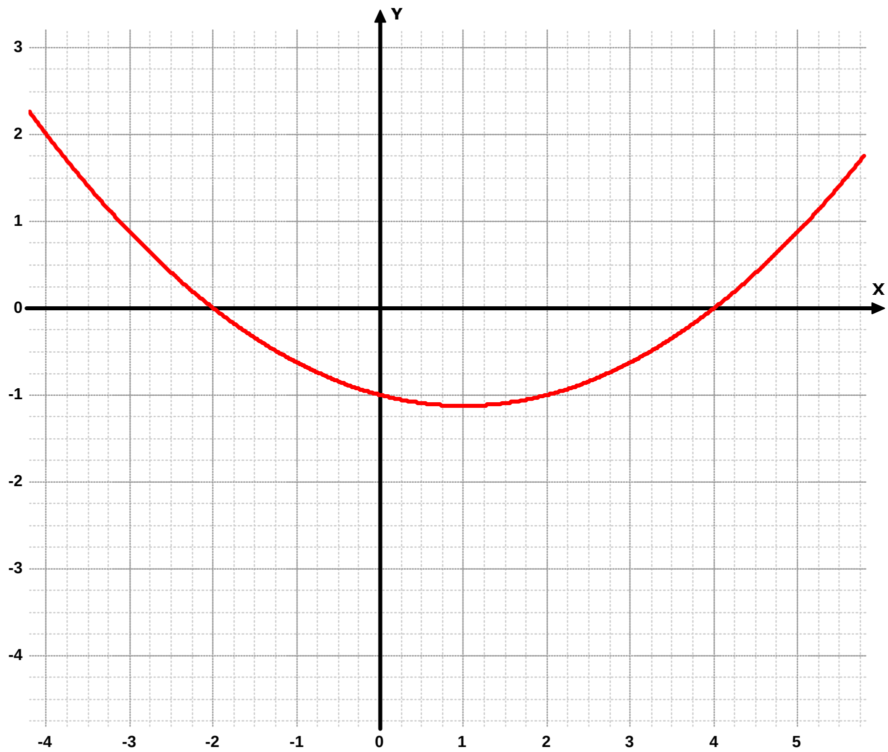
3\. a) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Geben Sie alle möglichen Werte für a an.
Tragen Sie den Graphen der Funktion f in das Bild ein!



b) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .

Tragen Sie den Graphen der Funktion $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$ in das Bild ein.



1. Klausur im LK Mathematik am 15.11.2006 * Lösung

1. a) Schnittpunkt des Graphen mit x-Achse: S(2;0)

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 8 - x^3\,dx = \left[\ 8x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 16 - 4 = 12$$

b) $\Delta x = \frac{2}{n}$; $x_i = \frac{2}{n}\cdot i$; $f(x_i) = 8 - \frac{8}{n^3}\cdot i^3$

Untersumme $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(8 - \frac{8}{n^3}\cdot i^3\right)\cdot\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{16}{n} - \sum_{i=1}^{n}\frac{16}{n^4}\cdot i^3 =$

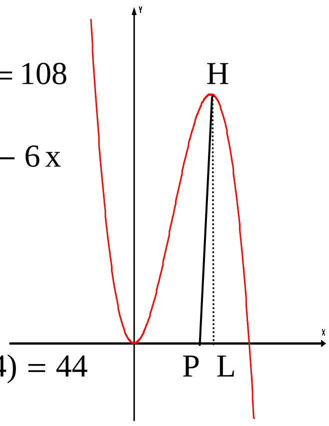
$$\frac{16}{n}\cdot n - \frac{16}{n^4}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = 16 - \frac{4\cdot(n^4+2n^3+n^2)}{n^4} = 16 - 4\cdot(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(16 - 4\cdot(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})\right) = 16 - 4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 16 - 4 = 12$$

2. a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2\cdot(6-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = 0$; $x_3 = 6$

$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^6 6x^2 - x^3\,dx = \left[\ 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 432 - 324 - 0 = 108$$



b) Hochpunkt H: $f'(x) = 12x - 3x^2 = 3x\cdot(4-x)$ und $f''(x) = 12 - 6x$

hor. Tg. : $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x\cdot(4-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$; $x_4 = 4$

$f''(x_4) = 12 - 6\cdot 4 < 0 \;\Rightarrow\; HOP(4\,;f(4)) = (4;32)$

L(4 ;0) und die Fläche „rechts von L“ hat den Inhalt A_1 :

$$A_1 = \int_4^6 f(x)\,dx = \int_4^6 6x^2 - x^3\,dx = \left[\ 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_4^6 = 108 - (128 - 64) = 44$$

$\frac{1}{2}\cdot A = \frac{108}{2} = 54$; das Dreieck PLH muss also den Flächeninhalt $54 - 44 = 10$

haben. Es gilt damit: $10 = \frac{1}{2}\cdot\overline{PL}\cdot\overline{LH} = \frac{1}{2}\cdot\overline{PL}\cdot 32 = 16\cdot\overline{PL} \;\Rightarrow\; \overline{PL} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

Also $x_p = x_L - 0{,}625 = 4 - 0{,}625 = 3{,}375$ und $P(3{,}375\,;0)$

4. a) Ersichtlich sind die Graphen für k = 2, k = 3 und k = 4 im Bild eingetragen.

b) Schnittpunkte der Graphen G_g und G_k :

$$g(x) = f_k(x) \;\Leftrightarrow\; 4-x^2 = k^2x^2 - x^2 - k \;\Leftrightarrow\; 4+k = k^2x^2 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{4+k}}{k}$$

$$A(k) = \int_{x_1}^{x_2} g(x) - f_k(x)\,dx = 2\cdot\int_0^{x_2} 4-x^2-(k^2x^2-x^2-k)\,dx = 2\cdot\int_0^{x_2} 4+k-k^2x^2\,dx =$$

$$2\cdot\int_0^{x_2} 4+k-k^2x^2\,dx = 2\cdot\left[\ (4+k)\cdot x - \frac{k^2x^3}{3}\right]_0^{x_2} = \qquad (\text{mit } x_2 = \frac{\sqrt{4+k}}{k})$$

$$2\cdot\left(\frac{(4+k)\cdot\sqrt{4+k}}{k} - \frac{k^2(4+k)\sqrt{4+k}}{3k^3} - 0\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{(4+k)\cdot\sqrt{4+k}}{k} = \frac{4\cdot(4+k)^{\frac{3}{2}}}{3k}$$

c) $$A'(k) = \frac{4}{3}\cdot\frac{k\cdot\frac{3}{2}(4+k)^{\frac{1}{2}} - (4+k)^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{k^2} = \frac{4\cdot(4+k)^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{3}{2}\cdot k-(4+k))}{3\cdot k^2} = \frac{4\cdot(4+k)^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{1}{2}k-4)}{3\cdot k^2}$$

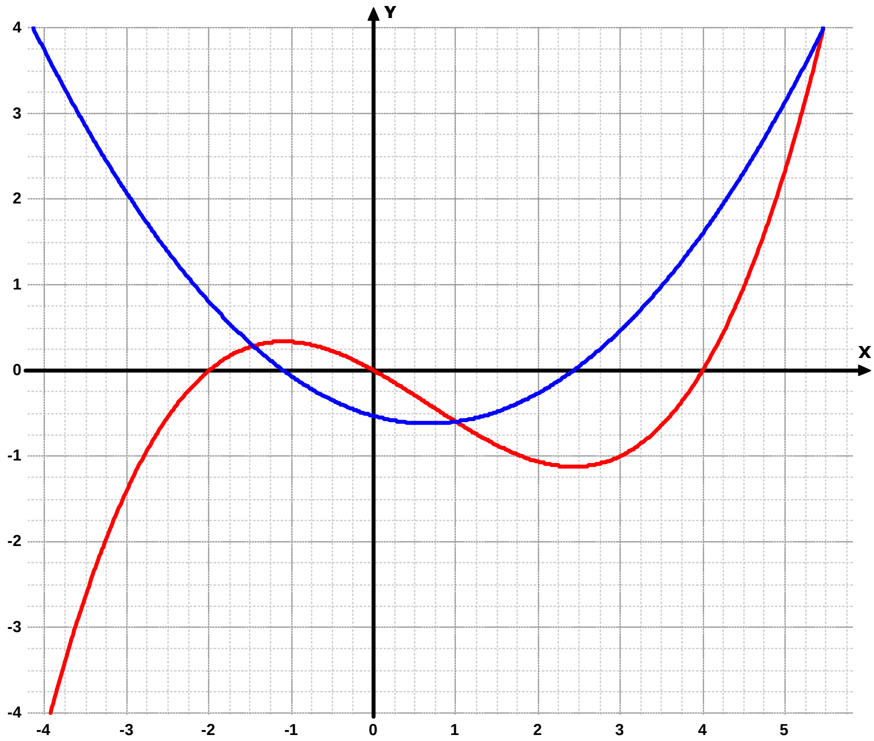
$$A'(k) = 0 \;\Leftrightarrow\; (4+k)^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{1}{2}k-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; k=8\ (k>1)\ ;\ A_{min} = A(8) = \frac{4\cdot 12\cdot\sqrt{12}}{3\cdot 8} = 4\sqrt{3}$$

Arbeitsblatt zur 1. Klausur im LK Mathematik am 15.11.2006

Lösung

3. a) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Geben Sie alle möglichen Werte für a an.
Tragen Sie den Graphen der Funktion f in das Bild ein!



a kann die Werte -2, 0 und 4 haben. (Nullstellen von F!)

Es gilt nach dem HDI:
f(x) = F´(x)

b) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .

Tragen Sie den Graphen der Funktion $F(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$ in das Bild ein.