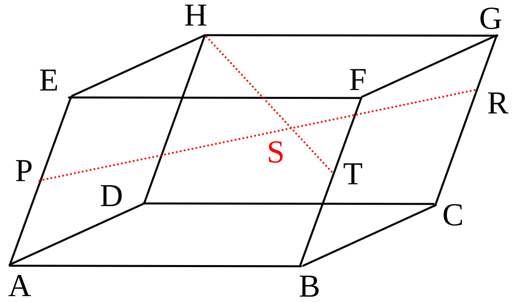
LK M * K12 * Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

1. Im Spat ABCDEFGH halbiert P die Strecke [AE] und R teilt die Strecke [GC] im Verhältnis 1 : 2 . T ist ein auf der Strecke [BF] frei beweglicher Punkt.



   a) An welcher Stelle der Strecke [BF] muss sich T befinden, damit sich die Geraden PR und HT in einem Punkt S schneiden?
   b) In welchem Verhältnis teilt dann S die Strecke [HT] ?

   Wie lauten die Antworten auf die Fragen in a) und b) , falls P die Strecke [AE] im Verhältnis
   c) 2 : 1 d) 1 : 2
   teilt?

2. Prüfen Sie jeweils, ob die Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ eine Basis des R^3 bilden.

   Prüfen Sie dann, ob man den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ darstellen kann!

   a) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. a) Begründen Sie, dass die Vektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ einen zweidimensionalen Unterraum des R^3 erzeugen.

   b) Für welche Werte von $k \in R$ ist der Vektor $\vec{c}$ ein Element dieses Unterraums?

   b1) $\vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ b3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ k+1 \\ k \end{pmatrix}$ b2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3k \\ k \\ 5k+1 \end{pmatrix}$

LK M * K12 * Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension * Lösungen

1. a) Es muss gelten $\overrightarrow{BT} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{BF}$; d.h. T teilt [BF] im Verhältnis $1:5$.
   b) S halbiert sowohl die Strecke [PR] als auch die Strecke [HT].
   c) Nun muss gelten $\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BF}$; d.h. T teilt [BF] im Verhältnis $1:2$.
   S halbiert weiterhin sowohl die Strecke [PR] als auch die Strecke [HT].
   d) Nun gilt $T = B$.
   S halbiert weiterhin sowohl die Strecke [PR] als auch die Strecke [HT].

2. a) Mit $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ kann man nur die triviale Nullsumme bilden,
   d.h. $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{b_3}$ bilden eine Basis.
   $$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{14}{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{19}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{13} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also sind $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{b_3}$ linear abhängig und bilden
   keine Basis. Trotzdem kann man den Vektor $\vec{a}$ darstellen, nun aber wegen der linearen Abhängigkeit von $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$, $\vec{b_3}$ sogar auf unendlich viele verschiedene Arten.
   Z.B. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = ...$

3. a) Mit $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann man nur die triviale Nullsumme bilden (oder $\vec{b_1} \nparallel \vec{b_2}$) ,
   deshalb sind $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ linear unabhängig und erzeugen einen zweidimensionalen Unterraum (d.h. eine Ebene) des R^3.
   b) b1) Für $k = -\frac{5}{7}$ gilt $\vec{c} = \frac{13}{7} \cdot \vec{b_1} - \frac{9}{7} \cdot \vec{b_2}$
   b2) Für $k = 11$ gilt $\vec{c} = 5 \cdot \vec{b_1} - 2 \cdot \vec{b_2}$
   b3) Für kein $k \in R$ lässt sich $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ darstellen.