LK Mathematik * K12 * Ebenen und Geraden im R^3

1. Gegeben sind im R^3 die Ebene $E: \; x_1 - k x_2 + 2 x_3 - 4 = 0 \quad (k \neq 0)$ und

   die Gerade $g: \; \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

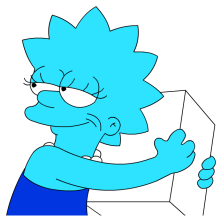
   Bestimmen Sie k so, dass g parallel zu E verläuft. Gilt dann $g \subseteq E$?

2. Gegeben sind im R^3 die Ebene $E: \; x_1 - 3x_2 + 2x_3 - a = 0 \quad (a \in R)$ und

   die Gerade $g: \; \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (k \in R)$.

   a) Zunächst gelte $a = 4$. Bestimmen Sie k so, dass g parallel zu E verläuft.
   Begründen Sie, dass dann $g \cap E = \{\ \}$ gilt.

   b) Nun gelte $k = 7$, d.h. g verläuft parallel zu E.
   Bestimmen Sie a so, dass $g \subseteq E$ gilt.



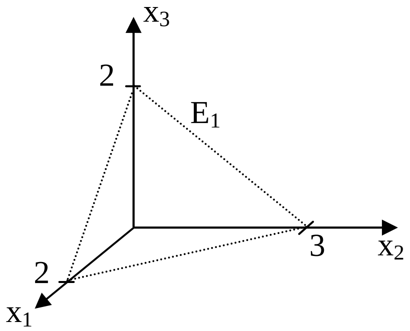
3. Gegeben ist im R^3 die Ebene $E: \; 2x_1 - x_3 - 3 = 0$.

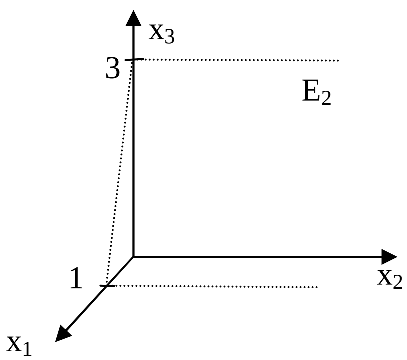
   a) Geben Sie eine Gerade g an, die ganz in E liegt.

   b) Geben Sie zwei von E verschiedene Ebenen F_1 und F_2 an, die ebenfalls g enthalten.

   c) Geben Sie eine Gerade k so an, dass gilt $k \subseteq F_1$ und $k \cap E = \{\ \}$.
   Fertigen Sie eine Skizze an!

4. Die beiden Bilder zeigen die Ebenen E_1 und E_2.





   a) Geben Sie E_1 und E_2 in Koordinatenform an und bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen.

   b) Zeichnen Sie die beiden Ebenen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   Kennzeichnen Sie die Schnittgerade und geben Sie die zugehörige Gleichung an.

LK Mathematik * K12 * Ebenen und Geraden im $\mathbb{R}^3$ * Lösungen

1. $k = \frac{5}{2}$; d.h. $E: \ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 8 = 0$

   $A(1/2/3) \in g$ und $A(1/2/3) \notin E$, d.h. $g \cap E = \{\ \}$

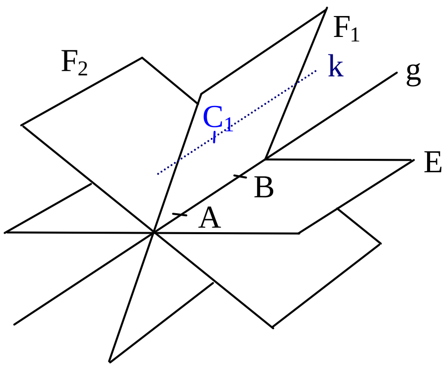
2. a) Für $k = 7$ gilt $g \cap E = \{\ \}$, d.h. g verläuft parallel zu E.

   b) Für $k = 7$ und $a = 5$ gilt $g \subseteq E$.

3. a) $A(2/0/-1) \in E$ und $B(0/0/-3) \in E$, d.h. $g: \ \vec{X} = \vec{B} + r \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ passt.

   b) $C_1(1/0/0) \notin E$ und $C_2(0/1/0) \notin E$, d.h. $\overrightarrow{BC_1}$ und $\overrightarrow{BC_2}$ sind keine Richtungsvektoren von Ebene E. Damit sind geeignete Ebenen z.B.
   $F_1: \ \vec{X} = \vec{B} + s \cdot \overrightarrow{BA} + t \cdot \overrightarrow{BC_1}$ und $F_2: \ \vec{X} = \vec{B} + p \cdot \overrightarrow{BA} + q \cdot \overrightarrow{BC_2}$

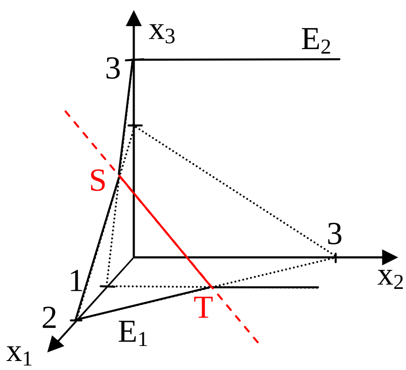
   c) Die Gerade k muss parallel zu E und damit parallel zu g liegen. Wählt man als Aufpunkt von k den Punkt $C_1(1/0/0) \notin E$, so erhält man $k: \ \vec{X} = \vec{C_1} + w \cdot \overrightarrow{BA}$.



4. a) $E_1: \ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ und $E_2: \ 3x_1 + x_3 = 3$ und

   Schnittgerade z.B. $g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

   b) Die Spurgeraden von E_1 und E_2 in der x_1-x_2-Ebene bzw. der x_1-x_3-Ebene schneiden sich ersichtlich in den beiden Punkten T(1/1,5/0) und S(0,5/0/1,5). (S berechnen in x_1-x_3-Ebene)



   Damit erhält man für die Schnittgerade

   $g: \ \vec{X} = \vec{T} + r \cdot \overrightarrow{TS}$ bzw.

   $g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ oder $g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$