Anwendungen der Exponentialfunktion
in Naturwissenschaften und Technik

1. Auf der Erde lebten 1930 etwa 2,015 Milliarden und 1960 etwa 3,010 Milliarden Menschen.
   a) Beschreiben Sie mit Hilfe dieser Daten das Wachstum der Erdbevölkerung durch eine geeignete Exponentialfunktion.
   b) Wie viele Menschen hätten demnach 1950 gelebt? (Tatsächlicher Wert : 2,509 Mrd.) Eine solche Berechnung heißt **Interpolation**.
   c) Wie viele Menschen hätten demnach 2005 gelebt? (Tatsächlicher Wert : 6,477 Mrd.) Eine derartige Berechnung heißt **Extrapolation**.
   d) Welche Werte liefert die (sehr gewagte) Extrapolation auf die Jahre 0 und 3000 ?
   e) Wann haben nach unserem Modell zwei Milliarden, eine Milliarde, nur Adam und Eva gelebt?
   f) Wann wird die 10-Milliarden-Grenze erreicht?
   g) In welchem Zeitraum verdoppelt sich nach dem Modell jeweils die Erdbevölkerung?

2. Peter bringt 1000 DM zu Bank. Das Geld wird mit 6 % verzinst.
   Wie viel Geld hat Peter nach einem Jahr, wenn die anteilig berechneten Zinsen
   a) jährlich b) monatlich c) täglich d) stündlich
   e) stetig (d.h. in jedem Moment)
   zum Kapital hinzugerechnet werden?

3. a) In welcher Zeit verdoppelt sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 5 %, falls
   a1) jährlich a2) monatlich a3) stetig
   verzinst wird?
   b) Hans benötigt in 10 Jahren 100 000 DM. Wie viel Geld muss er heute zur Bank bringen, wenn diese 6 % Zinsen gibt und
   b1) jährlich b2) monatlich b3) stetig
   verzinst?

4. Harte ß-Strahlen werden zu 80 % in einer 1,00 mm dicken Aluminiumschicht absorbiert.
   a) Stellen Sie eine geeignete Formel auf, mit der man den nicht absorbierten Anteil der ß-Strahlung in Abhängigkeit von der durchstrahlten Schichtdicke berechnen kann.
   b) Bei welcher Schichtdicke werden 50 % absorbiert?
   c) Bei welcher Schichtdicke dringt noch 1 % durch?
   d) Welcher Anteil der Strahlung wird von einer 0,50 mm dicken Aluschicht verschluckt?

5. Uran hat eine Halbwertszeit von 4,5 Milliarden Jahren.
   a) Wie vie Prozent einer Uranmenge sind nach 10 Milliarden, nach einer Milliarde, nach einer Million bzw. nach 1000 Jahren noch vorhanden?
   b) Wie lange dauert es, bis 90 % der Uranmenge zerfallen sind?

6. Radium 226 hat eine Halbwertszeit von 1590 Jahren.
   a) Wie viel zerfällt von 10g Radium in 2000 Jahren?
   b) Wie lange muss man warten, bis nur noch 0,10 g von den 10g übrig sind?
   c) Wie viele Radiumatome befinden sich in einer Probe von einem Milligramm?
   (Kenntnisse aus der Chemie bzw. Physik sind hilfreich! Ph-Formelsammlung!)
   Wie viele Radiumkerne zerfallen bei dieser Probe pro Sekunde?
   Lassen Sie sich nicht entmutigen, wenn ein erstes Ergebnis sehr unbefriedigend ist!
   Die Aufgabe lässt sich nämlich einfach lösen!

Lösungen:

1. $\Delta N \sim N$ und $\Delta N \sim \Delta t \;\Rightarrow\; \Delta N \sim N \cdot \Delta t \;\Rightarrow\; \Delta N = k \cdot N \cdot \Delta t \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta N}{\Delta t} = k \cdot N$

d.h. $\dfrac{d\,N(t)}{d\,t} = k \cdot N(t)$ und damit $N(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$;

für a erhält man durch Einsetzen von $t=0$: $N_o = N(0) = a \cdot e^0 = a$

also $N(t) = N_o \cdot e^{k \cdot t}$; wobei N_o die Anzahl der Menschen zum Zeitpunkt $t=0$ angibt.

Gibt $T_{1/2}$ das Zeitintervall an, so gilt $k = \dfrac{\ln(2)}{T_{1/2}}$, denn aus $N(t_2) = 2 \cdot N(t_1)$ folgt

$N_o \cdot e^{k \cdot t_2} = 2 \cdot N_o \cdot e^{k \cdot t_1} \;\Rightarrow\; e^{k(t_2 - t_1)} = 2 \;\Rightarrow\; k \cdot (t_2 - t_1) = \ln(2) \;\Rightarrow\; T_{1/2} = t_2 - t_1 = \dfrac{\ln(2)}{k}$

also kann man auch schreiben: $N(t) = N_o \cdot e^{\frac{\ln(2) \cdot t}{T_{1/2}}}$

a) Wählt man $t = 0$ im Jahr 0 so gilt:
(1) $N_o \cdot e^{k \cdot 1930a} = 2{,}015 \cdot 10^9$ und (2) $N_o \cdot e^{k \cdot 1960a} = 3{,}010 \cdot 10^9$
Division von (2) durch (1) liefert

$e^{k \cdot (1960a - 1930a)} = \dfrac{3{,}010 \cdot 10^9}{2{,}015 \cdot 10^9} \;\Rightarrow\; e^{k \cdot 30a} = \dfrac{3010}{2015} \;\Rightarrow\; k = \dfrac{\ln(\frac{3010}{2015})}{30\ a} = 0{,}013377 \dfrac{1}{a}$

$N(t) = N_o \cdot e^{0{,}013377 \cdot \frac{t}{a}}$ wobei t die Jahreszahl mit der Einheit a bedeutet.
Zur Ermittlung von N_o setzt man die Werte zu $t_1 = 1930a$ ein:

$2{,}015 \cdot 10^9 = N_o \cdot e^{0{,}013377 \cdot \frac{1930a}{a}} \;\Rightarrow\; N_o = 0{,}012355$ und damit

$N(t) = 0{,}012355 \cdot e^{0{,}013377 \cdot \frac{t}{a}}$ (Im Jahr 0 gibt es also nur 0,012355 Menschen!)

b) $N(1950a) = 0{,}012355 \cdot e^{0{,}013377 \cdot \frac{1950a}{a}} = 2{,}632 \cdot 10^9$

c) $N(2005a) = 0{,}012355 \cdot e^{0{,}013377 \cdot \frac{2005a}{a}} = 5{,}495 \cdot 10^9$

d) $N(0a) = 0{,}012355$ und $N(3000a) = 0{,}012355\, e^{0{,}013377 \cdot \frac{3000a}{a}} = 3{,}315 \cdot 10^{15}$!!!

e) $N(t_1) = 2 \cdot 10^9 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2 \cdot 10^9}{0{,}012355} = e^{0{,}013377 \cdot \frac{t_1}{a}} \;\Leftrightarrow\; t_1 = \dfrac{\ln(\frac{2 \cdot 10^9}{0{,}012355})}{0{,}013377} a = 1929\,a$

$N(t_2) = 10^9 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{10^9}{0{,}012355} = e^{0{,}013377 \cdot \frac{t_2}{a}} \;\Leftrightarrow\; t_2 = \dfrac{\ln(\frac{10^9}{0{,}012355})}{0{,}013377} a = 1878\,a$

$N(t_3) = 2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2}{0{,}012355} = e^{0{,}013377 \cdot \frac{t_3}{a}} \;\Leftrightarrow\; t_3 = \dfrac{\ln(\frac{2}{0{,}012355})}{0{,}013377} a = 380\,a$

Nach dem Modell haben also im Jahr 1929 zwei Milliarden, 1878 eine Milliarde und im Jahr 380 genau zwei Menschen auf der Erde gelebt.

f) $10 \cdot 10^9 = 0{,}012355 \cdot e^{0{,}013377 \cdot \frac{t_4}{a}} \;\Rightarrow\; t_4 = \dfrac{\ln(\frac{10 \cdot 10^9}{0{,}012355})}{0{,}013377} a = 2050\,a$

Die 10 Milliarden-Grenze sollte im Jahr 2050 überschritten werden.

g) $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k} = \frac{\ln(2)}{0,013377}\text{ a} = 51,8\text{ a}$

Nach dem Modell verdoppelt sich alle 51,8 a die Erdbevölkerung.

2. Mit Z = jährliche Zinsen, K_o = Kapital = 1000 € und p = Zinssatz = 6,0% = 0,060 gilt:

a) $K_1 = K_{\text{nach 1 Jahr}} = K_o + Z = (1+p)\cdot K_o = 1,060 \cdot 1000\,€ = 1060\,€$

b) Wird jeden Monat verzinst, so bekommt man natürlich pro Monat nur einen Zinssatz von $p_{\text{Monat}} = \frac{p}{12}$ und daher $K_1 = (1+\frac{p}{12})^{12}\cdot K_o = (1+\frac{0,060}{12})^{12}\cdot 1000\,€ \approx 1061,68\,€$

c) $K_1 = (1+\frac{p}{360})^{360}\cdot K_o = (1+\frac{0,060}{360})^{360}\cdot 1000\,€ \approx 1061,83\,€$

d) $K_1 = (1+\frac{p}{360\cdot 24})^{360\cdot 24}\cdot K_o = (1+\frac{0,060}{8640})^{8640}\cdot 1000\,€ \approx 1061,84\,€$

e) $K_1 = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{p}{n})^{n}\cdot K_o = e^{p}\cdot 1000\,€ \approx 1061,84\,€$