

LKM * K12 * Typische Aufgaben zum natürlichen Logarithmus

1. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich der Funktion und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen. Geben Sie auch den Wertebereich an.

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = \ln(2+x)$

c) $f(x) = \ln(1-x)$

d) $f(x) = \ln(|x-1|) - 1$

Das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs bestimmt man bei manchen Logarithmusfunktionen mit der so genannten **Regel von l'Hospital**. Diese Regel lautet:

Sind zwei an der Stelle a stetige Funktionen f und g mit $f(a) = g(a) = 0$ in einer Umgebung von a differenzierbar und existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r$, so existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r$.

Diese Regel gilt auch für $f(a) = g(a) \rightarrow \pm \infty$ sowie für $x \rightarrow \pm \infty$.

Eine typische Aufgabe dazu mit der üblichen Schreibweise lautet z.B.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0^+$$

2. Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln x}{(x+1)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x \cdot \ln x}{x^2+1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x}{1+x+x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-1} \cdot \ln(x-1)$

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs. Ermitteln Sie dann alle Nullstellen, alle Hoch- bzw. Tiefpunkte und skizzieren Sie den Graphen. Kann man nun auch den Wertebereich angeben?

a) $f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$

b) $f(x) = \ln \frac{2x}{1+x^2}$

c) $f(x) = 2 \cdot \ln \sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)}$

4. Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen der Funktionen?

a) $f(x) = \ln(4x)$ und $g(x) = 1 - \ln x$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ und $g(x) = 1 + \ln(x+2)$

