LK M * K12 * Drei Aufgaben zur Integralfunktion und dem HDI

1. Diskutieren Sie die Integralfunktion $F(x) = \int\limits_0^x t^2 - 1\,dt$.

   Zeichnen Sie dazu den Graph von F und von $F' = f$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   An welchen Stellen hat G_F Hoch- bzw. Tiefpunkte?
   Können Sie die Koordinaten dieser Extrempunkte ermitteln?

2. Wie unterscheidet sich der Graph der Integralfunktion $G(x) = \int\limits_1^x t^2 - 1\,dt$

   vom Graph der Integralfunktion $F(x) = \int\limits_0^x t^2 - 1\,dt$ aus der Aufgabe 1?

3. Kann man die drei Funktionen
   $H_1(x) = x^2 - 2x - 1$ bzw. $H_2(x) = x^2 + 1$ bzw. $H_3(x) = x^3 + 1$
   jeweils als Integralfunktionen schreiben?
   Begründen Sie Ihre Antwort!

LK M * K12 * Drei Aufgaben zur Integralfunktion und dem HDI

1. Diskutieren Sie die Integralfunktion $F(x) = \int\limits_0^x t^2 - 1\,dt$.

   Zeichnen Sie dazu den Graph von F und von $F' = f$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   An welchen Stellen hat G_F Hoch- bzw. Tiefpunkte?
   Können Sie die Koordinaten dieser Extrempunkte ermitteln?

2. Wie unterscheidet sich der Graph der Integralfunktion $G(x) = \int\limits_1^x t^2 - 1\,dt$

   vom Graph der Integralfunktion $F(x) = \int\limits_0^x t^2 - 1\,dt$ aus der Aufgabe 1?

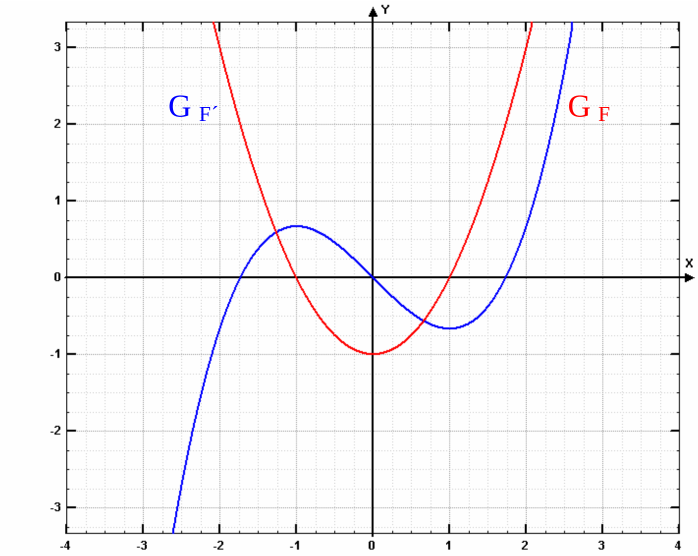
3. Kann man die drei Funktionen
   $H_1(x) = x^2 - 2x - 1$ bzw. $H_2(x) = x^2 + 1$ bzw. $H_3(x) = x^3 + 1$
   jeweils als Integralfunktionen schreiben?
   Begründen Sie Ihre Antwort!

1.

$F'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Nullstellen von F' bei $x_{1/2} = \pm 1$ mit Vorzeichenwechsel, d.h. bei $x_{1/2} = \pm 1$ hat G_F Extrempunkte.

$F''(x) = 2x$ hat Nullstelle bei $x_3 = 0$ mit Vorzeichenwechsel, d.h. G_F hat bei $x_3 = 0$ einen Wendepunkt.



Die integralfreie Darstellung von F lautet

$$F(x) = \int_0^x t^2 - 1\,dt = \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x 1\,dt = \frac{x^3}{3} - x = \frac{1}{3}x(x^2 - 1)$$

Daraus folgt TIP(1 ; - 2/3) und HOP (-1 ; 2/3)

2.

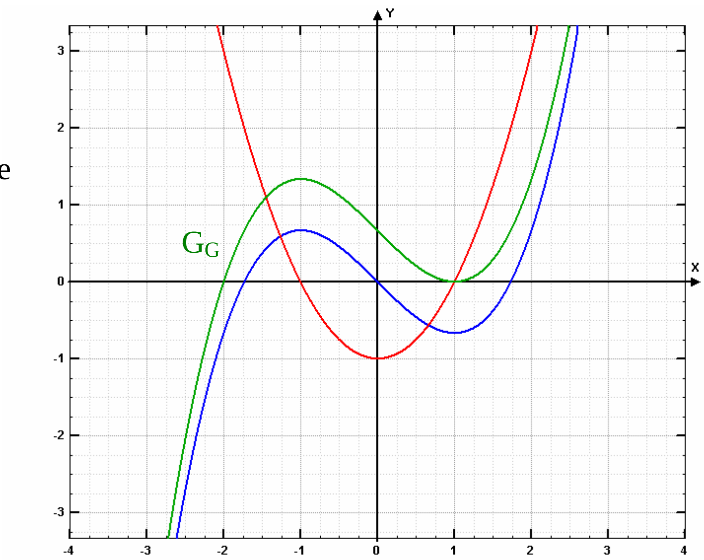
$$G(x) = \int_1^x t^2 - 1\,dt$$

G und F haben überall die gleiche Ableitung, d.h. sie unterscheiden sich nur durch eine Konstante c.

$G(x) = F(x) + c$

Wegen $G(1) = 0$ gilt $c = 2/3$

Also $G(x) = \frac{1}{3}x(x^2 - 1) + \frac{2}{3}$



3. $$H_1(x) = x^2 - 2x - 1 \overset{!}{=} \int_a^x 2t - 2\,dt = \frac{2x^2}{2} - 2x - \left(\frac{2a^2}{2} - 2a\right) \Leftrightarrow 1 = \frac{2a^2}{2} - 2a$$

$$a^2 - 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\left(2 \pm \sqrt{4+4}\right) = 1 \pm \sqrt{2}$$

d.h. $$H_1(x) = \int_{1+\sqrt{2}}^x 2t - 2\,dt = \int_{1-\sqrt{2}}^x 2t - 2\,dt$$

$$H_2(x) = x^2 + 1 \overset{!}{=} \int_a^x 2t\,dt = \frac{2x^2}{2} - \left(\frac{2a^2}{2}\right) \Leftrightarrow 1 = -\frac{2a^2}{2} \Leftrightarrow -1 = a^2$$ hat keine Lösung! D.h. H_2 lässt sich nicht als Integralfunktion schreiben!

$$H_3(x) = x^3 + 1 \overset{!}{=} \int_a^x 3t^2\,dt = \frac{3x^3}{3} - \left(\frac{3a^3}{3}\right) \Leftrightarrow 1 = -\frac{3a^3}{3} \Leftrightarrow -1 = a^3 \Leftrightarrow a = -1$$

$$H_3(x) = \int_{-1}^x 3t^2\,dt$$