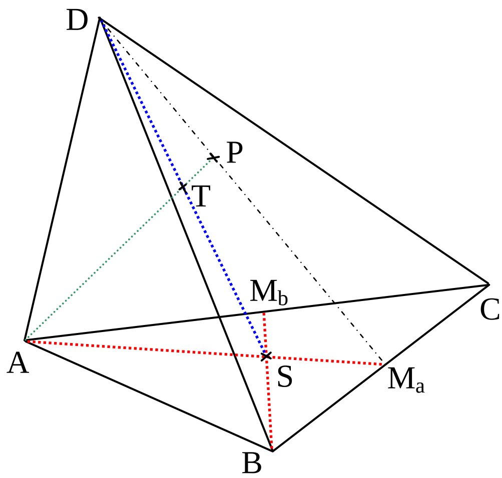
LK Mathematik * K12 * 1. Klausur im 2. Kurshalbjahr am 28.03.2007

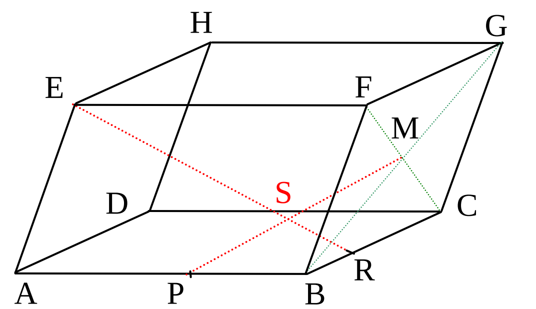
1. Das Bild zeigt eine Pyramide ABCD.
   A (1/5/1), B (-2/1/6), C (4/-3/8) und D (11/9/-13).
   S ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.
   T halbiert die Strecke [SD].



   a) Bestimmen Sie die Koordinaten von M_a, S und T.
      [Teilergebnis: T(6/5/-4)]

   b) Die Gerade AT durchdringt das Dreieck BCD im Punkt P. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes P.

2. Im Spat ABCDEFGH ist M der Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms BCGF.
   R teilt [BC] im Verhältnis 1 : 2 .
   Der Punkt P ist auf der Strecke [AB] frei beweglich.



   An welcher Stelle der Strecke [AB] muss sich P befinden, damit sich die Geraden PM und ER in einem Punkt S schneiden?

3. Die beiden Vektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ erzeugen einen Untervektorraum U im R^3.

   a) Prüfen Sie, ob der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Untervektorraum U gehört!

   b) Für welchen Wert von $k \in R$ ist der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ k \end{pmatrix}$ ein Element dieses Unterraums?

   c) Die Vektoren $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugen einen Untervektorraum V im R^3.

      Bestimmen Sie 3 verschiedene Vektoren, die sowohl zu U als auch zu V gehören.
      Was fällt auf?

Fortsetzung auf der Rückseite! Blatt bitte wenden!

4. Dringt Licht in Glas ein, so wird ein geringer Teil des Lichtstroms Q absorbiert.

Gibt x die Eindringtiefe in das Glas und $Q(x)$ den Lichtstrom <u>nach</u> Durchdringen von x an, so lautet das zugehörige Absorptionsgesetz $Q(x) = Q_o \cdot e^{-\alpha \cdot x}$.

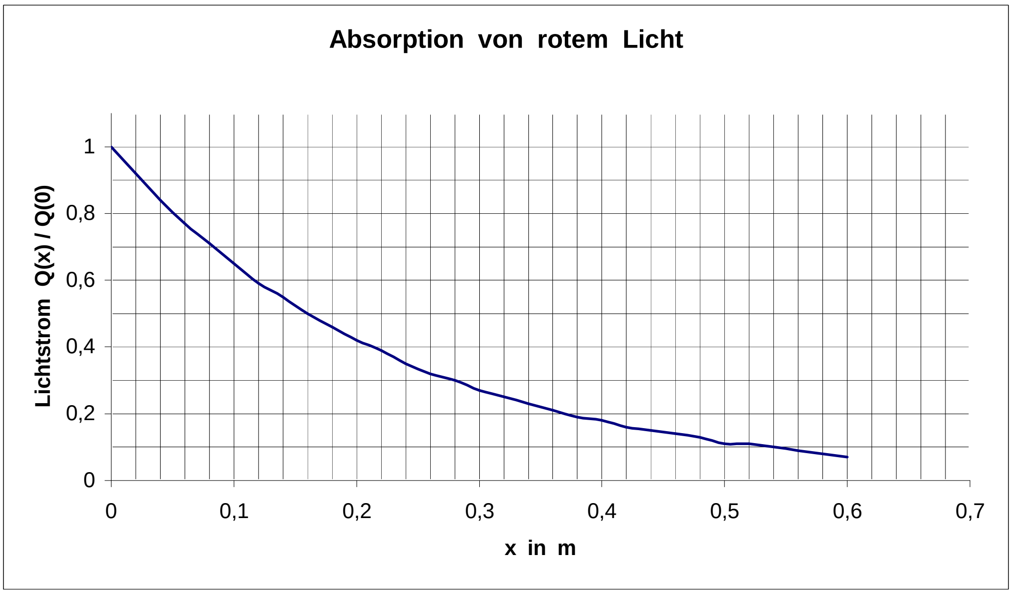
Hierbei ist Q_o der am Glas auftreffende Lichtstrom und α der so genannte Absorptionskoeffizient.

Nach der so genannten Halbwertsdicke $x_{1/2}$ ist genau die Hälfte des Lichtstroms absorbiert.

a) Zeigen Sie $\alpha = \dfrac{\ln(2)}{x_{1/2}}$

b) Die mittlere Reichweite x_m ist jene Schichtdicke, nach der der Lichtstrom auf den Bruchteil $\frac{1}{e} \approx 36{,}8\%$ abgesunken ist. Für blaues Licht gilt: $x_m = 0{,}20\text{m}$.
Bestimmen Sie die Halbwertsdicke für blaues Licht. (Ergebnis: $x_{1/2} = 0{,}14\text{m}$)
Nach welcher Schichtdicke sind 10% des blauen Lichts absorbiert?

c) Die Stärke der Absorption hängt von der Farbe (Wellenlänge) des Lichts ab.
Das Diagramm zeigt die experimentell bestimmte Absorption von rotem Licht in Glas.
Begründen Sie, ob rotes Licht stärker oder geringer als blaues Licht absorbiert wird!



Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	2	3a	b	c	4a	b	c	Summe
Punkte	4	7	10	3	3	4	2	5	2	40

LK Mathematik * K12 * 1. Klausur im 2. Kurshalbjahr am 28.03.2007 * Lösungen

1. a) $\overrightarrow{M_a} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) \;\Rightarrow\; M_a(1/-1/7)$; $\vec{S} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) \;\Rightarrow\; S(1/1/5)$

$\vec{T} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{S}+\vec{D}) \;\Rightarrow\; T(6/5/-4)$

b) $\vec{0} = \overrightarrow{AM_a} + \overrightarrow{M_aP} + \overrightarrow{PA}$; $\overrightarrow{M_aP} = x\cdot\overrightarrow{M_aD}$ und $\overrightarrow{PA} = y\cdot\overrightarrow{TA}$

$$\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-5 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix};\quad \overrightarrow{M_aP} = x\cdot\overrightarrow{M_aD} = x\cdot\begin{pmatrix} 11-1 \\ 9+1 \\ -13-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x \\ 10x \\ -20x \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{PA} = y\cdot\overrightarrow{TA} = y\cdot\begin{pmatrix} 1-6 \\ 5-5 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5y \\ 0 \\ 5y \end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10x \\ 10x \\ -20x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5y \\ 0 \\ 5y \end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

(1) $10x - 5y = 0 \qquad\Rightarrow\; y = 2x = 1{,}2$

(2) $-6 + 10x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0{,}6$

(3) $6 - 20x + 5y = 0 \qquad$ Probe: $6 - 20\cdot 0{,}6 + 5\cdot 1{,}2 = 6-12+6 = 0$

Also gilt: $\vec{P} = \vec{A} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5\cdot 1{,}2 \\ 0 \\ 5\cdot 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$; also $P(7/5/-5)$

2. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ sind linear unabhängig

$\overrightarrow{AP} = x\cdot\vec{a}$; $\vec{0} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{EP}$ und $\overrightarrow{PS} = r\cdot\overrightarrow{PM}$ und $\overrightarrow{SE} = s\cdot\overrightarrow{RE}$

$\overrightarrow{PS} = r\cdot\overrightarrow{PM} = r\cdot((1-x)\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c})$; $\overrightarrow{SE} = s\cdot(-\frac{1}{3}\cdot\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$; $\overrightarrow{EP} = -\vec{c} + x\cdot\vec{a}$

$\vec{0} = r\cdot((1-x)\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}) + s\cdot(-\frac{1}{3}\cdot\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) - \vec{c} + x\cdot\vec{a} \quad\Rightarrow$

$\vec{0} = [r\cdot(1-x) - s + x]\cdot\vec{a} + [\frac{1}{2}r - \frac{1}{3}s]\cdot\vec{b} + [\frac{1}{2}r + s - 1]\cdot\vec{c} \quad\Rightarrow$

(1) $0 = r\cdot(1-x) - s + x \qquad\Rightarrow\; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}$

(2) $0 = \frac{1}{2}r - \frac{1}{3}s \;\Rightarrow\; s = \frac{3}{2}r \qquad\Rightarrow\; s = \frac{3}{4}$

(3) $0 = \frac{1}{2}r + s - 1 \qquad\Rightarrow\; 2r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AP} = x\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$, d.h. P halbiert die Strecke [AB].

3\. a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

(1) $-2 = 2r + s$ $\quad s = -2 - 2\cdot(1-2s) \Rightarrow 4 = 3s \Rightarrow s = \frac{4}{3}$

(2) $1 = r + 2s \Rightarrow r = 1 - 2s$ $\quad \Rightarrow r = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$

(3) $-1 = 4r - s$ $\quad$ Probe: $4r - s = -\frac{20}{3} - \frac{4}{3} = -8 \neq -1 \Rightarrow \vec{a} \notin U$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ k \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

(1) $1 = 2r + s$ $\quad s = 1 - 2\cdot(-7-2s) \Rightarrow -15 = 3s \Rightarrow s = -5$

(2) $-7 = r + 2s \Rightarrow r = -7 - 2s$ $\quad \Rightarrow r = -7 + 10 = 3$

(3) $k = 4r - s$ $\quad \Rightarrow k = 4\cdot 3 + 5 = 17$

Für $k = 17$ liegt $\vec{c}$ in U.

c) $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \;/\; y, z \in R \right\}$ d.h. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \cap U \Leftrightarrow r \cdot \vec{b_1} + s \cdot \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

(1) $r \cdot 2 + s \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow s = -2r$ Für einen Vektor $\vec{w} \in V \cap U$ gilt damit

$\vec{w} = r \cdot \vec{b_1} - 2r \cdot \vec{b_2} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \tilde{r} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{r} \in R$.

Alle diese Vektoren sind also kollinear.

4\. a) Aus $\frac{1}{2} \cdot Q_o = Q_o \cdot e^{-\alpha \cdot x_{1/2}} \Rightarrow \ln(\frac{1}{2}) = -\alpha \cdot x_{1/2} \Rightarrow \ln(2) = \alpha \cdot x_{1/2} \Rightarrow \alpha = \frac{\ln(2)}{x_{1/2}}$

b) Aus $\frac{1}{e} \cdot Q_o = Q_o \cdot e^{-\alpha \cdot x_m} \Rightarrow \ln(\frac{1}{e}) = -\alpha \cdot x_m \Rightarrow \ln(e) = \alpha \cdot x_m \Rightarrow x_m = \frac{1}{\alpha}$

$x_m = \frac{1}{\alpha} = \frac{x_{1/2}}{\ln(2)} \Rightarrow x_{1/2} = x_m \cdot \ln(2) = 0{,}20\text{m} \cdot \ln(2) = 0{,}1386...\text{m} \approx 0{,}14\text{m}$

$\frac{90}{100} \cdot Q_o = Q_o \cdot e^{-\alpha \cdot x} \Rightarrow \ln(0{,}9) = -\alpha \cdot x \Rightarrow \ln(\frac{10}{9}) = \alpha \cdot x \Rightarrow x = \frac{\ln(\frac{10}{9})}{\ln(2)} \cdot x_{1/2}$

Nach $x \approx \frac{\ln(\frac{10}{9})}{\ln(2)} \cdot 0{,}139\text{m} = 0{,}021\text{m} = 2{,}1\text{cm}$ sind 10% des blauen Lichts absorbiert.

c) Aus dem Diagramm erkennt man $x_{1/2\,;\,\text{rot}} = 0{,}16\text{m} > 0{,}14\text{m} = x_{1/2\,;\,\text{blau}}$,
d.h. rotes Licht wird weniger stark als blaues Licht absorbiert.