LK Mathematik, 2. Klausur in 12/2 am 04.07.2007

1. Im R^3 sind gegeben die Ebene E und die Gerade g :

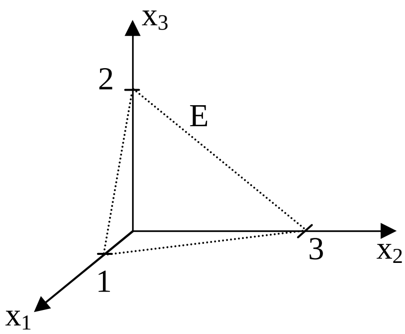
$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

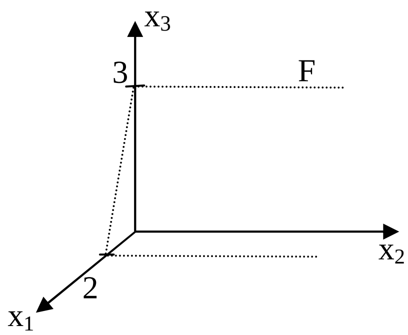
   a) Zeigen Sie mit geeigneter Rechnung, dass für die Koordinatenform von E gilt:
   $E: \; 2x_1 - x_2 + x_3 = 4$

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von E und g.

   c) Projiziert man die Gerade g in Richtung der x_3 – Achse auf die Ebene E , so erhält man die Gerade p. Bestimmen Sie eine Gleichung von p .
   (Hinweis: Eine Skizze hilft unter Umständen!)

2. Die beiden Bilder zeigen die Lage der Ebene E bzw. F im R^3.





   a) Geben Sie die Gleichungen von E und F in Koordinatenform an.

   b) Bestimmen Sie die Schnittgerade g von E und F .

   (mögliches Ergebnis: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$)

   c) Geben Sie die Gleichung einer Geraden h an, für die gilt
   $E \cap h = \{\,\}$ und $F \cap h = \{\,\}$.

3. Die Jahrgangsstufe 11 eines Gymnasiums besuchen 60 Schülerinnen und 50 Schüler. Nur 26 Schülerinnen und Schüler dieser Jahrgangsstufe sind noch nicht volljährig, und die Anzahl volljähriger Schüler ist dreimal so groß wie die Anzahl nicht volljähriger Schülerinnen.
   Welcher Prozentsatz der Schülerinnen ist bereits volljährig?

   Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer Mehrfeldertafel.

Bitte wenden! Fortsetzung auf der Rückseite!

4. a) Wie viele (auch sinnlose) Wörter kann man mit den Buchstaben des Wortes „SONNENSCHEIN“ bilden?

   b) Ein Passwort soll genau 5 Zeichen enthalten. Dabei sind als Zeichen die 26 Buchstaben des Alphabets und die 10 Ziffern 0, 1, ... , 9 erlaubt.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es?

   c) Beim Lauf über 100-Meter starten 8 Läufer.
   Wie viele Möglichkeiten gibt es für die drei Ersten auf dem Siegerpodest?

5. Lateinlehrer Lucan unterrichtet einen Grundkurs mit 10 Schülerinnen und 8 Schülern.
Pro Unterrichtsstunde werden von ihm jeweils genau 4 verschiedene Schüler ausgefragt.
Die Auswahl der Schüler erfolgt dabei (mit Hilfe eines „elektronischen Würfels“) ganz zufällig. Aus pädagogischen Gründen lässt Herr Lucan zunächst auch zu, dass ein Schüler mehrfach in aufeinander folgenden Stunden geprüft werden kann.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stunde nur Mädchen geprüft werden?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stunde genau zwei Mädchen und zwei Jungen geprüft werden?

   c) Peter hat auf die Stunde nicht gelernt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er nicht ausgefragt wird? (Ergebnis: $p = 7/9$)

   d) Hans muss sich auf die Mathe-Klausur vorbereiten und hat keine Zeit zur Vorbereitung auf Latein. Wie groß ist das Risiko (d.h. die Wahrscheinlichkeit), dass er in drei aufeinander folgenden Stunden mindestens einmal geprüft wird?

   e) Lena ist immer gut vorbereitet und möchte gerne geprüft werden.
   Wie viele Stunden sind mindestens nötig, so dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% wenigstens einmal ausgefragt wird?

   Da Matthias auch nach 12 Stunden noch nie geprüft wurde, ändert Herr Lucan sein Auswahlverfahren. Von nun an wird jeder geprüfte Schüler in folgenden Stunden nicht mehr ausgewählt.

   f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Matthias auch in den nächsten drei Stunden nicht geprüft wird?

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	c	3	4a	b	c	5a	b	c	d	e	f	Summe
Punkte	4	3	4	4	5	2	7	3	2	2	2	2	2	2	4	2	50

LK Mathematik, 2. Klausur in 12/2 am 04.07.2007 * Lösung

1. a) Für E gilt:

$x_1 = 2 - r \quad \Rightarrow \quad r = 2 - x_1$

$x_2 = 1 + r + s \quad \Rightarrow \quad s = x_2 - r - 1$

$x_3 = 1 + 3r + s \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 + 3r + x_2 - r - 1 = 2r + x_2 \quad \Rightarrow$

$x_3 = 2(2 - x_1) + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 4 - 2x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad E: \ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4$

b) $g \cap E: \quad 2(1+t) - (2+2t) + (1+3t) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3t = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad S(2/4/4)$$

c) $S \in p$ und $T \in p$, wenn gilt $\{T\} = E \cap h$ mit $h: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E \cap h: \quad 2 \cdot (1) - (2) + (1+t) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = 3 \quad$ und $\quad T(1/2/1+3) = T(1/2/4)$

$$\text{also} \quad p: \ \vec{X} = \vec{S} + q \cdot \overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-4 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + q^* \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. a) $E: \ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1 \quad$ also $\quad E: \ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

$F: \ \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{3} = 1 \quad$ also $\quad F: \ 3x_1 + 2x_3 = 6$

b) $E \cap F: \quad 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \quad$ und $\quad 3x_1 = 6 - 2x_3$

wähle z.B. $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ und $6 \cdot 2 + 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = -3$ also $A(2/-3/0) \in g$

wähle $x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 0$ und $2x_2 + 3 \cdot 3 = 6 \Rightarrow x_2 = -1{,}5$ also $B(0/-1{,}5/3) \in g$

also

$$g: \ \vec{X} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ -1{,}5+3 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Es muss gelten $h \parallel g$ und der Aufpunkt von h darf weder in E noch in F liegen.

$$\text{z.B.} \quad h: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. (1) $a + c = 60$ und (2) $b + d = 50$
(3) $c + d = 26$ und (4) $b = 3c$
(4) in (2) eingesetzt:
$3c + d = 50$ d.h. $d = 50 - 3c$ in (3)
$c + 50 - 3c = 26$ d.h. $24 = 2c$ d.h.
$c = 12$; $d = 14$; $a = 48$; $b = 36$
Der gesuchte Prozentsatz lautet $a : (a + c) = 48 : 60 = 80\ \%$
80 % der Schülerinnen der Jahrgangsstufe 11 sind bereits volljährig.

	w	m	
volljährig	a	b	84
nicht volljährig	c	d	26
	60	50	

4. a) 12 Buchstaben, davon 2mal S , 4mal N , 2mal E

Es gibt daher $\frac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 2!} = 4989600$ Wörter.

b) Es gibt $(26+10)^5 = 36^5 = 60466176$ Passwörter.

c) Anzahl der Möglichkeiten auf dem Siegerpodest: $\frac{8!}{(8-3)!} = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$

5. $|\Omega| = \binom{18}{4} = 3060$

a) $p_a = \frac{\binom{10}{4}}{|\Omega|} = \frac{210}{3060} = \frac{7}{102} = 6{,}8627...\% \approx 6{,}86\%$

b) $p_b = \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}}{|\Omega|} = \frac{45\cdot 28}{3060} = \frac{1260}{3060} = \frac{7}{17} = 41.1764...\% \approx 41{,}18\%$

c) $p_c = \frac{\binom{17}{4}}{|\Omega|} = \frac{2380}{3060} = \frac{7}{9} = 77{,}7777...\% \approx 77{,}78\%$

d) $p_d = 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^3 = 52{,}94924...\% \approx 52{,}95\%$

e) $1 - P(\text{"Lena wird nicht ausgefragt"}) \geq 95\% \;\Leftrightarrow\; 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^n \geq 0{,}95 \;\Leftrightarrow$

$0{,}05 \geq \left(\frac{7}{9}\right)^n \;\Leftrightarrow\; \ln(0{,}05) \geq n\cdot\ln\left(\frac{7}{9}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{7}{9}\right)} \leq n \;\Leftrightarrow\; n \geq 11{,}92...$

Lena muss mindestens 12 Stunden abwarten.

f) $p_f = \frac{\binom{17}{4}\cdot\binom{13}{4}\cdot\binom{9}{4}}{\binom{18}{4}\cdot\binom{14}{4}\cdot\binom{10}{4}} = \frac{2380\cdot 715\cdot 126}{3060\cdot 1001\cdot 210} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\%$