LK M * K12 * Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow

Def.: Ist Ω eine Ergebnismenge, dann heißt eine Funktion P, die jedem Ereignis $E \subset \Omega$ genau eine reelle Zahl P(E) zuordnet, ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $P(E) \geq 0$ für jedes $E \subset \Omega$
(2) $P(\Omega) = 1$
(3) Für $E_1 , E_2 \subset \Omega$ mit $E_1 \cap E_2$ gilt:
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Man sagt, P ist ein **nicht negatives** (1), **normiertes** (2), **additives** (3) Maß.

Beachte:

- Zu einer Ergebnismenge Ω kann es viele verschiedene Wahrscheinlichkeitsmaße geben.
- Wegen (3) ist P schon eindeutig festgelegt, wenn man $P(\{\omega\})$ nur für alle Elementarereignisse $\{\omega\}$ angibt.

Aufgabe:
Geben Sie zum Zufallsexperiment „Wurf eines Würfels“ mit $\Omega = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsmaße an.
Bestimmen Sie anschließend jeweils P(„ungerade Zahl“).

ω	1	2	3	4	5	6
P({ω})						

P(„ungerade Zahl“) =

ω	1	2	3	4	5	6
P({ω})						

P(„ungerade Zahl“) =

Def.: Man spricht von einem so genannten **„Laplace-Experiment“**, wenn allen Elementarereignissen die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird.
Es gilt dann:

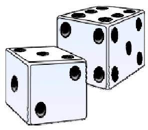
$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Aufgaben:

1. Ein „Laplace-Würfel“ wird 6-mal geworfen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten folgende Ereignisse auf?

   a) E_1 = „Keine 6“ b) E_2 = „Genau eine 6“
   c) E_3 = „Höchstens eine 6“ c) E_4 = „Jede Zahl genau einmal“

2. Zwei „Laplace-Würfel“ werden gleichzeitig geworfen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten folgende Ereignisse auf?



   a) E_1 = „Augensumme 12“ b) E_2 = „Augensumme 7“
   c) E_3 = „Augensumme 6“ d) E_4 = „zwei unterschiedliche Zahlen“
   e) E_5 = „Augendifferenz 1“ f) E_6 = „Augendifferenz 4“
   g) E_7 = „Augendifferenz > 3“ h) E_8 = „Augenprodukt 6“
   i) E_9 = „Augenprodukt 4“ k) E_{10} = „Augenprodukt < 5“
   l) E_{11} = „eine ungerade und eine gerade Zahl“

LK M * Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow

Lösungen:

z.B.

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	0,1	0,1	0,3	0,1	0,3	0,1

ω	1	2	3	4	5	6
$P(\{\omega\})$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

P(„ungerade Zahl") = 0,1+0,3+0,3 = 0,7

P(„ungerade Zahl") = 3/6 = 0,5

Aufgaben:

1. Ω = { (111111), (111112), (111113), ... , (666666) } und $|\Omega| = 6^6 = 46656$

a) P(„Keine 6") = $\frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} \approx 33{,}5\%$

b) P(„Genau eine 6") = $\frac{6 \cdot 5^5}{6^6} = \frac{18750}{46656} \approx 40{,}2\%$

c) P(„Höchstens eine 6") = P(„Keine 6") + P(„Genau eine 6") =

$\frac{5^6 + 6 \cdot 5^5}{6^6} = \frac{15625 + 18750}{46656} \approx 33{,}5\% + 40{,}2\% = 73{,}7\%$

d) P(„Jede Zahl genau einmal") = $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{720}{46656} \approx 1{,}5\%$

2. Ω = { (11), (12), (13), (14), (15), (16), (21), ... , (66) } und $|\Omega| = 6^2 = 36$

a) P(„Augensumme 12") = $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\%$

b) P(„Augensumme 7") = $\frac{2 \cdot 3}{36} = \frac{6}{36} \approx 16{,}7\%$

c) P(„Augensumme 6") = $\frac{2 \cdot 2 + 1}{36} = \frac{5}{36} \approx 13{,}9\%$

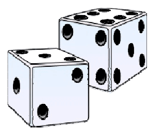
d) P(„2 unterschiedl. Zahlen") = 1- P(„2 gleiche Zahlen") = $1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} \approx 83{,}3\%$

e) P(„Augendifferenz 1") = $\frac{2 \cdot 5}{36} = \frac{10}{36} \approx 27{,}8\%$

f) P(„Augendifferenz 4") = $\frac{2 \cdot 2}{36} = \frac{4}{36} \approx 11{,}1\%$

g) P(„Augendifferenz > 3") = $\frac{2 \cdot 2}{36} + \frac{2 \cdot 1}{36} = \frac{6}{36} \approx 16{,}7\%$

h) P(„Augenprodukt 6") = $\frac{2 \cdot 2}{36} = \frac{4}{36} \approx 11{,}1\%$



i) P(„Augenprodukt 4") = $\frac{2+1}{36} = \frac{3}{36} \approx 8{,}3\%$

k) P(„Augenprodukt < 5") = $\frac{1+2+2+3}{36} = \frac{8}{36} \approx 22{,}2\%$

l) P(„eine ungerade und eine gerade Zahl") = $\frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{36} = \frac{18}{36} = 50{,}0\%$