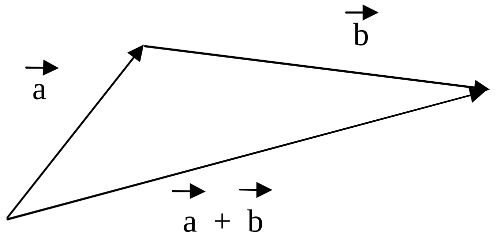
Eigenschaften der geometrischen Vektoren im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

Vektoraddition



Bezüglich der **„Vektoraddition“** bildet die Menge V der geometrischen Vektoren eine so genannte **kommutative Gruppe**, d.h.
in der Menge der Vektoren V gibt es eine Verknüpfung „+“, mit folgenden Eigenschaften:

(1) zu zwei beliebigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in V$ gibt es einen Vektor $\vec{a}+\vec{b} \in V$

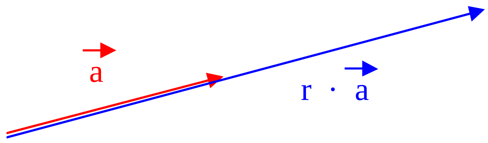
(2) für alle $\vec{a},\vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (Kommutativ-Gesetz)

(3) für alle $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in V$ gilt: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (Assoziativ-Gesetz)

(4) es gibt bezüglich der Addition ein neutrales Element $\vec{0} \in V$ (Nullvektor), d.h.
für jedes $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$

(5) Es gibt zu jedem $\vec{a} \in V$ ein inverses Element $\vec{a}^* \in V$ mit $\vec{a}+\vec{a}^* = \vec{0}$
Für dieses inverse Element schreibt man auch $\vec{a}^* = -\vec{a}$

S-Multiplikation



Jeden Vektor $\vec{a}$ kann man mit einer reellen Zahl r multiplizieren (**skalare Multiplikation**)
Für diese skalare Multiplikation (**S-Multiplikation**) gilt:

(1) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ (und $-1\cdot\vec{a} = -\vec{a}$) (Einheit 1)

(2) $(r\cdot s)\cdot\vec{a} = r\cdot(s\cdot\vec{a})$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in V$ (A-Gesetz)

(3) $(r+s)\cdot\vec{a} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{a}$ für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in V$ (D-Gesetz)
$r\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$ (D-Gesetz)

Definition eines Vektorraums V über einem Körper K

Ist V eine nicht leere Menge ($V \neq \{\ \}$) und K ein Zahlen-Körper,
so nennt man V einen Vektorraum über K genau dann, wenn gilt:

(1) In V ist eine Addition „+“ definiert, bezüglich der V eine kommutative Gruppe ist.

(2) Zwischen K und V ist eine (äußere) Verknüpfung definert, für die gilt:
- (a) Für jedes $r \in K$ und $a \in V$ gibt es genau ein $r\cdot\vec{a} \in V$
- (b) $(r\cdot s)\cdot\vec{a} = r\cdot(s\cdot\vec{a})$ für alle $r, s \in K$ und $\vec{a} \in V$
- (c) $(r+s)\cdot\vec{a} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{a}$ für alle $r, s \in K$ und $\vec{a} \in V$
  $r\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = r\cdot\vec{a} + r\cdot\vec{b}$ für alle $r \in K$ und $\vec{a}, \vec{b} \in V$
- (d) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ für die Einheit $1 \in K$ und $\vec{a} \in V$

Die Elemente von V heißen Vektoren, die Elemente von K nennt man Skalare.