

LK Mathematik * K12 * Rechnungen im affinen Punktraum

- Gegeben sind $A(1/-2/3)$, $B(0/2/2)$ und $C(5/2/1)$
Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden.
Bestimmen Sie die Koordinaten von D so, dass das Viereck ein Parallelogramm ist und ermitteln Sie dann die Koordinaten des Schnittpunktes S der Diagonalen.
- Zeigen Sie, dass die vier Punkte $A(1/2/3)$, $B(2/1/0)$, $C(5/7/12)$ und $D(-3/0/1)$ in einer Ebene E_1 liegen.
 - Geben Sie mindestens zwei weitere Punkte an, die in dieser Ebene E_1 liegen.
 - Bestimmen Sie den Punkt $P(0/p_2/-8)$ so, dass er ebenfalls in der Ebene E_1 liegt.
 - Bestimmen Sie alle Punkte $R(r_1/r_2/4)$ so, dass sie ebenfalls in der Ebene liegen.
Überlegen Sie, welche Punktmenge durch diese Punkte $R(r_1/r_2/4)$ beschrieben wird.
- Gegeben sind $A(1/-2/3)$, $B(3/0/1)$, $C(-5/1/6)$ und $D(-6/0/7)$.
 - Zeigen Sie, dass die Punkte A,B,C und D ein Trapez mit bilden.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Diagonalen dieses Trapezes.
- Der Punkt T teilt die Strecke [AB] im Verhältnis 1 : 3.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten von T, falls gilt $A(-2/7/3)$ und $B(4/-5/15)$.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten von A, falls gilt $T(-1/3/2)$ und $B(5/-1,5/1)$.
 - Bestimmen Sie die Koordinaten von B, falls gilt $A(3/1/0)$ und $T(2/-1/1)$.
- Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1/0/3)$, $B(2/-1/5)$ und $C(3/3/2)$ ein Dreieck bilden und ermitteln Sie die Koordinaten des „Schwerpunktes“, d.h. des Schnittpunktes der drei Seitenhalbierenden.
- Von einem Dreieck ABC sind bekannt $A(-1/-4/6)$, $C(3/2/1)$ und der Schwerpunkt $S(1/-1/3)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B.
- Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1/0/2)$, $B(3/-1/2)$ und $C(1/1/4)$ eine Ebene festlegen.
 - Bestimmen Sie alle Punkte $P(0/p_2/p_3)$, die in dieser Ebene liegen!
Welcher Zusammenhang besteht zwischen p_1 und p_2 ?
 - Bestimmen Sie alle Punkte $R(a/a/b)$, die in dieser Ebene liegen!
Welcher Zusammenhang besteht zwischen a und b?

8. a) Zeigen Sie, dass $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

b) Bestimmen Sie die Komponentendarstellung von $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

c) Bestimmen Sie die Komponentendarstellung von $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

LK Mathematik * K12 * Rechnungen im affinen Punktraum * Lösungen

1. $\overline{AB} \parallel \overline{AC} \Rightarrow A, B$ und C bilden ein Dreieck.

$$\text{Aus } \overline{AB} = \overline{DC} \text{ folgt } \vec{D} = \vec{C} - \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow D = D(6/-2/2)$$

$$\vec{S} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{C}) \Rightarrow S = S(3/0/2)$$

e) Bestimmen Sie den Punkt $P(0/p_2/-8)$ so, dass er ebenfalls in der Ebene E_1 liegt.

f) Bestimmen Sie alle Punkte $R(r_1/r_2/4)$ so, dass sie ebenfalls in der Ebene liegen.

Überlegen Sie, welche Punktmenge durch diese Punkte $R(r_1/r_2/4)$ beschrieben wird.

$$2. \text{ a) } \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -2 \end{vmatrix} = \dots = 0 \Rightarrow A, B, C \text{ und } D \text{ liegen in einer Ebene.}$$

$$\text{b) z.B. } \vec{P}_1 = \vec{A} + 2 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \vec{B} - \vec{A} \Rightarrow P_1 = P_1(3/0/-3)$$

$$\vec{P}_1 = \vec{A} - 1 \cdot \overline{AB} = 2 \cdot \vec{A} - \vec{B} \Rightarrow P_2 = P_2(0/3/6)$$

c) Mit \overline{AB} und \overline{AC} kann man jeden Vektor in der Ebene E_1 darstellen.

$$\text{D.h. } \overline{AP} = x \cdot \overline{AB} + y \cdot \overline{AC} \Leftrightarrow \vec{P} - \vec{A} = x \cdot (\vec{B} - \vec{A}) + y \cdot (\vec{C} - \vec{A}) \text{ also}$$

$$(1) \quad -1 = x + 4y \quad \text{setze } x = -1 - 4y \text{ in (2) und (3) ein:}$$

$$(2) \quad p_2 - 2 = -x + 5y \quad (2) \quad p_2 = 3 + 9y$$

$$(3) \quad -11 = -3x + 9y \quad (3) \quad -14 = 21y$$

$$\text{also } y = -\frac{2}{3} \text{ und } p_2 = 3 - 9 \cdot \frac{2}{3} = -3 \text{ Damit gilt } P = P(0/-3/-8)$$

$$\text{d) } \overline{AR} = \begin{pmatrix} r_1 - 1 \\ r_2 - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } 0 = \det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AR}) \Leftrightarrow$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & (r_1 - 1) \\ -1 & 5 & (r_2 - 2) \\ -3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 45 - 21r_2 + 6r_1 \Leftrightarrow 2r_1 = 7r_2 - 15$$

$$\{(r_1/r_2/4) / \text{ mit } 2r_1 = 7r_2 - 15\} = \{(3,5r_2 - 7,5/r_2/4) / r_2 \in \mathbb{R}\}$$

Diese Punkte beschreiben eine Gerade, die (im Abstand 4) parallel zur x - y -Ebene liegt.

3. a) $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$ und $\overline{AB} \parallel \overline{AD} \Rightarrow$ Viereck $ABCD$ ist ein Trapez.

b) Nach Strahlensatz gilt: $\overline{AS} : \overline{SC} = \overline{AB} : \overline{CD} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{AS} = 2 \cdot \overline{SC} \Rightarrow$

$$3 \cdot \vec{S} = 2 \cdot \vec{C} + \vec{A} \Rightarrow S = S(-3/0/5)$$

$$4. \text{ a) } \overline{AT} = 3 \cdot \overline{TB} \Rightarrow 4 \cdot \vec{T} = 3 \cdot \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \vec{B} + \vec{A}) \Rightarrow T = T(2,5/-2/12)$$

$$\text{b) } \overline{AT} = 3 \cdot \overline{TB} \Rightarrow 4 \cdot \vec{T} = 3 \cdot \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = 4 \cdot \vec{T} - 3 \cdot \vec{B} \Rightarrow A = A(-19/16,5/5)$$

$$\text{c) } \overline{AT} = 3 \cdot \overline{TB} \Rightarrow 4 \cdot \vec{T} = 3 \cdot \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot \vec{T} - \vec{A}) \Rightarrow B = B\left(\frac{5}{3}/-\frac{5}{3}/\frac{4}{3}\right)$$

$$5. \overline{AB} \nparallel \overline{AC} \Rightarrow A, B \text{ und } C \text{ bilden ein Dreieck. } \vec{S} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \Rightarrow S = S(2/\frac{2}{3}/\frac{10}{3})$$

$$6. \vec{S} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) \Rightarrow \vec{B} = 3 \cdot \vec{S} - \vec{A} - \vec{C} \Rightarrow S = S(1/-1/2)$$

7. a) $\overline{AB} \nparallel \overline{AC} \Rightarrow A, B \text{ und } C \text{ legen eine Ebene fest.}$

b) $\overline{AP} = x \cdot \overline{AB} + y \cdot \overline{AC} \Rightarrow$ folgendes LGS:

$$(1) \quad -1 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = -0,5 \quad \text{eingesetzt in (2)}$$

$$(2) \quad p_2 = -x + y \quad (2) \quad y = p_2 - 0,5 \quad \text{eingesetzt in (3)}$$

$$(3) \quad p_3 - 2 = 2y \quad (3) \quad p_3 - 2 = 2p_2 - 1$$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen p_2 und p_3 lautet also:

$$p_3 = 2p_2 + 1 \quad \text{und die Punktmenge kann man schreiben als } \{ (0/p_2/2p_2+1) / p_2 \in \mathbb{R} \}$$

c) $\overline{AR} = x \cdot \overline{AB} + y \cdot \overline{AC} \Rightarrow$ folgendes LGS:

$$(1) \quad a - 1 = 2x$$

$$(2) \quad a = -x + y \quad \Rightarrow \quad x = y - a \quad \text{eingesetzt in (2)}$$

$$(3) \quad b - 2 = 2y$$

$$(1) \quad a - 1 = 2y - 2a$$

$$(3) \quad b - 2 = 2y \quad \text{eingesetzt in (1)} \quad a - 1 = b - 2 - 2a$$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen a und b lautet also:

$$b = 3a + 1 \quad \text{und die Punktmenge kann man schreiben als } \{ (a/a/3a+1) / a \in \mathbb{R} \}$$

$$8. \text{ a) } \det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \dots = -17 \neq 0 \Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \text{ bilden eine Basis in } \mathbb{R}^3.$$

b) $\vec{e}_1 = x \cdot \vec{b}_1 + y \cdot \vec{b}_2 + z \cdot \vec{b}_3$ liefert das folgende LGS:

$$(1) \quad 1 = x + 2z$$

$$(2) \quad 0 = 2x + 2y - z$$

$$(3) \quad 0 = 3x - y$$

Dieses LGS hat die Lösung $(x/y/z) = (\frac{1}{17}/\frac{3}{17}/\frac{8}{17})$

$$\text{also gilt } \vec{e}_1 = \frac{1}{17} \cdot \vec{b}_1 + \frac{3}{17} \cdot \vec{b}_2 + \frac{8}{17} \cdot \vec{b}_3 .$$

c) $\vec{a} = x \cdot \vec{b}_1 + y \cdot \vec{b}_2 + z \cdot \vec{b}_3$ liefert das folgende LGS:

$$(1) \quad -4 = x + 2z$$

$$(2) \quad 5 = 2x + 2y - z$$

$$(3) \quad 7 = 3x - y$$

Dieses LGS hat die Lösung $(x/y/z) = (2/-1/-3)$

$$\text{also gilt } \vec{a} = 2 \cdot \vec{b}_1 - \vec{b}_2 - 3 \cdot \vec{b}_3 .$$