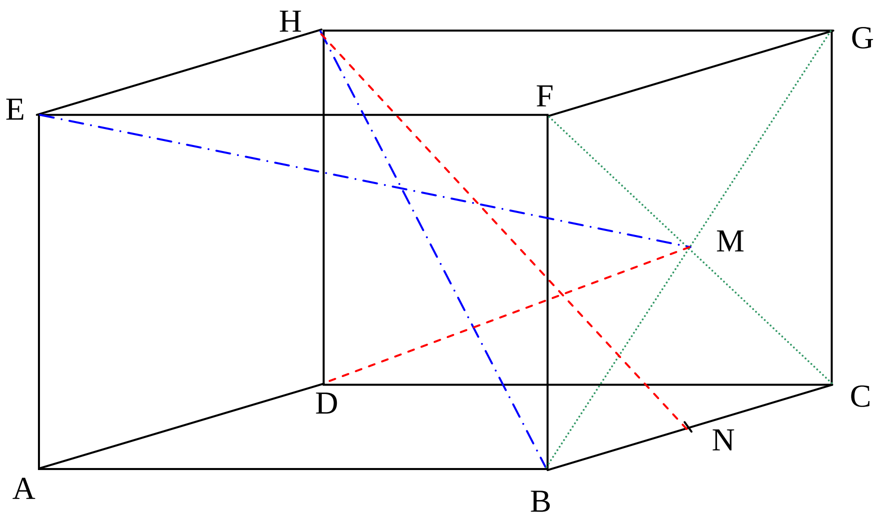
LK M * K12 * Anwendungsaufgaben zu linear unabhängigen Vektoren im R^3

1. Im abgebildeten Quader ABCDEFGH gilt: M ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Rechteck BCGF, N ist der Mittelpunkt der Strecke [BC].



a. Zeigen Sie mit Hilfe von drei linear unabhängigen Vektoren:
   a1) Die Geraden DM und HN schneiden sich und der Schnittpunkt teilt die Strecke [DM] im Verhältnis 2 **:** 1.
   a2) Die Geraden HB und EM schneiden sich nicht.

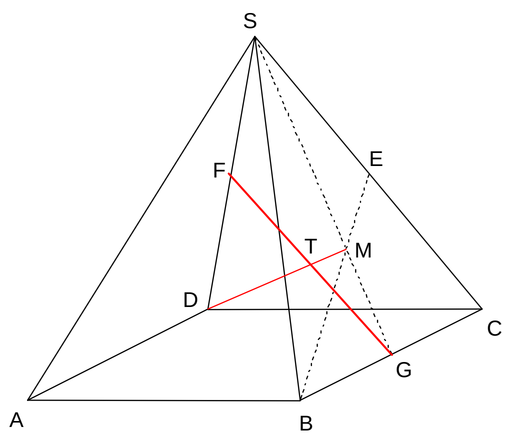
b. Begründen Sie die beiden Aussagen von Aufgabe 1 ohne Rechnung rein geometrisch!

c. Beantworten Sie mit geometrischer Begründung oder mit geeigneter Vektorrechnung die beiden folgenden Fragen und bestimmen Sie gegebenenfalls die Lage der gesuchten Punkte.
   c1) Gibt es auf den Strecken [HG] und [AB] zwei Punkte X bzw. Y , so dass sich die Geraden EM und XY schneiden?
   c2) Gibt es auf den Strecken [HD] und [FB] zwei Punkte P bzw. R , so dass sich die Geraden EM und PR schneiden?

2. Das Bild zeigt eine Pyramide ABCDS mit dem Parallelogramm ABCD als Grundfläche. E, F und G sind die Seitenmitten der Kanten [SC], [SD] und [BC]. M ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCS.

   Zeigen Sie, dass sich die Geraden GF und DM in einem Punkt T schneiden.

   Bestimmen Sie das Streckenverhältnis, in dem T die Strecken [FG] und [DM] teilt.



3. Im R^3 sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.

b) Prüfen Sie, ob sich $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt. Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig oder unabhängig.

c) Finden Sie einen (möglichst einfachen) Vektor $\vec{d}$ so, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig sind und begründen Sie die lineare Unabhängigkeit!

d) Stellen Sie $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ dar.

e) Die Menge Ψ aller Linearkombinationen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden einen Vektorraum.
(Man sagt, Ψ bildet einen Untervektorraum von R^3.)
Begründen Sie diese Aussage!
Wie kann man die Menge Ψ formal schreiben?
Veranschaulichen Sie diese Menge Ψ im R^3.

f) Gibt es einen reellen Wert für k so, dass der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 13 \\ k \\ 11 \end{pmatrix}$ zu Ψ hinzugehört?

g) Geben Sie einen Vektor $\vec{r}$ so an, dass er nicht zu Ψ hinzugehört.
Was kann man über die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{r}$ sagen?

h) Gibt es einen reellen Wert für t so, dass der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3 \end{pmatrix}$ zu Ψ hinzugehört?

i) Gibt es einen reellen Wert für s so, dass der Vektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} s+1 \\ 2s \\ 5 \end{pmatrix}$ zu Ψ hinzugehört?

LK M * K12 * Anwendungsaufgaben zu linear unabhängigen Vektoren
Lösungen:

1. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ damit gilt

   a1)

   $\overrightarrow{DM} = \vec{a} - 0{,}5\vec{b} + 0{,}5\vec{c}$ und $\overrightarrow{HN} = \vec{a} - 0{,}5\vec{b} - \vec{c}$ und $\overrightarrow{ND} = -\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$

   Wir nehmen an, dass sich DM und HN in einem Punkt S schneiden!

   Mit $\overrightarrow{DS} = r \cdot \overrightarrow{DM}$ und $\overrightarrow{SN} = s \cdot \overrightarrow{HN}$ gilt dann

   $\vec{0} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{ND} = r \cdot \overrightarrow{DM} + s \cdot \overrightarrow{HN} + \overrightarrow{ND} = ... = (r + s - 1) \cdot \vec{a} + (-\frac{r}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}) \cdot \vec{b} + (\frac{r}{2} - s) \cdot \vec{c}$

   Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ folgt daraus:

   (1) $r + s - 1 = 0$ und (2) $-\frac{r}{2} - \frac{s}{2} + \frac{1}{2} = 0$ und (3) $\frac{r}{2} - s = 0$

   Gleichung (1) und (2) sind äquivalent und aus (1) und (3) folgt: $r = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{1}{3}$.

   Das heißt $\overline{DS} = \frac{2}{3}\overline{DM}$ und damit $\overline{SM} = \frac{1}{3}\overline{DM}$ und daher $\overline{DS} : \overline{SM} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$

   S teilt damit die Strecke [DM] im Verhältnis 2 : 1.

   a2)

   Die Annahme, dass sich HB und EM in einem Punkt T schneiden führt mit einer analogen Rechnung zum Widerspruch!

b) Die nicht parallelen Geraden HN und DM liegen in der vom Trapez HDNM aufgespannten Ebene und schneiden sich deshalb.
   Die Punkte H, B und M liegen in der von ABGH aufgespannten „Diagonalebene“.
   Der Punkt E liegt nicht in dieser „Diagonalebene“, und damit hat die Gerade EM als einzigen Schnittpunkt mit dieser Ebene den Punkt M.
   EM und HB können sich deshalb nicht schneiden.

c)
   c1) Nur falls X = G und Y = B gilt, schneiden sich EM und XY im Punkt M.
   c2) Die Gerade EM durchstößt die von HDBF aufgespannte „Diagonalebene“ in einem Punkt Q. Es gibt damit unendlich viele Punkte P und R mit der geforderten Eigenschaft.

2. Die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{DG}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{DS}$ spannen die durch die Punkte D, G und S festgelegte Ebene auf, in der sich die beiden Geraden DM und FG befinden.

   Es gilt: $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ und $\overrightarrow{FG} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. Mit $\overrightarrow{DT} = r \cdot \overrightarrow{DM}$ und $\overrightarrow{TG} = s \cdot \overrightarrow{FG}$ $\Rightarrow$

   $\vec{0} = \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{TG} + \overrightarrow{GD} = ... = (\frac{2}{3}r + s - 1) \cdot \vec{a} + (\frac{1}{3}r - \frac{1}{2}s) \cdot \vec{b}$ $\Rightarrow$

   (1) $\frac{2}{3}r + s - 1 = 0$ und (2) $\frac{1}{3}r - \frac{1}{2}s = 0$ $\Rightarrow$ $s = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{3}{4}$

   Also $\overline{DT} = \frac{3}{4} \cdot \overline{DM}$ und $\overline{TG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FG}$

   T teilt damit [FG] im Verhältnis 1 : 1 und [DM] im Verhältnis 3 : 1 .

3\. a) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig, denn ersichtlich gilt $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

b) Aus $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ folgt $r = 3$ und $s = -4$.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also linear abhängig.

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und z.B. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn aus

$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{d} = \vec{0} \Rightarrow r = s = t = 0$

d) $\vec{v} = 2 \cdot \vec{a} - \vec{b} - 5 \cdot \vec{d}$

e) Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Elemente von Ψ und $r \in R$, so gilt:
$\vec{x} + \vec{y} \in \Psi$ und $r \cdot \vec{x} \in \Psi$ und $\vec{0} \in \Psi$ und $-(\vec{x}) \in \Psi$
Da die Rechengesetze (A-, K-, D-Gesetz) in R^3 gelten, gelten sie auch in der Teilmenge $\Psi \subset R^3$.

f) Für $k = -2$ gilt $\vec{w} = 5 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}$

g) Z.B. $\vec{r} = \vec{d}$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{r}$ sind dann linear unabhängig.

h) Für $t = 1$ gilt $\vec{u} = 1 \cdot \vec{a}$

i) Für $s = -\frac{2}{7}$ gilt $\vec{u} = \frac{37}{21} \cdot \vec{a} - \frac{2}{7} \cdot \vec{b}$.