

Weihnachtsaufgaben zur Logarithmus- und Exponentialfunktion

- Ein dünnes Blatt Papier der Dicke $d = 0,10$ mm und der Fläche 6 dm^2 soll n -mal gefaltet werden. Dabei entsteht ein Papierstapel der Dicke $d(n)$ mit dem Flächeninhalt $F(n)$.
 - Bestimmen Sie Formeln für $d(n)$ und $F(n)$.
 - Berechnen Sie $d(n)$ und $F(n)$ für $n = 10, 20$ und 30 .
 - Wie oft muss man falten, damit die Dicke des Papierstapels
 - 10m
 - dem Abstand Erde - Mond (ca. 384 000 km)
 - dem Durchmesser des sichtbaren Universums (ca. 30 Milliarden Lichtjahre, das sind etwa $3 \cdot 10^{23}$ km) entspricht?



- Josef skizziert die Graphen der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = x^{10}$. Nach der Skizze hat Josef den Verdacht, dass für alle $x > 2$ gilt $2^x < x^{10}$. Auch die folgende Tabelle scheint dies zu zeigen:

x	1	2	3	5	10	15	20
$f(x) = 2^x$	2	4	8	32	1.024	$3,3 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^6$
$g(x) = x^{10}$	1	1.024	$5,9 \cdot 10^4$	$9,7 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^{10}$	$5,8 \cdot 10^{11}$	$1,0 \cdot 10^{13}$

- Skizzieren Sie wie Josef die beiden Graphen. Prüfen Sie den Verdacht von Josef, indem sie weitere Tabellenwerte ermitteln.
 - Wie viele Lösungen hat die Gleichung $2^x = x^{10}$? Geben Sie die Lösungen (nur ungefähr) an!
- Die Erben des Königs Krösus legen im Jahre 0 unserer Zeitrechnung **eine** Drachme an. Die ausgehandelten Zinsen von jährlich 3,0% werden am Jahresende dem Kapital zugeschlagen.
 - Wie viele Drachmen haben die Erben zu Beginn des Jahres 1, 2, 3 unserer Zeitrechnung? Geben Sie eine Formel für dieses Kapital $K(n)$ zu Beginn des n-ten Jahres an!
 - Wie groß ist das Kapital nach 10, 20, 50 bzw. 100 Jahren?
 - Zu Beginn welchen Jahres überschreitet das Kapital 1000 DM bzw. 1000 000 DM? Wie viel besitzen die Erben heute?
 - Beantworten Sie die Fragen in 3c) auch für den Fall, dass der ausgehandelte Prozentsatz für die Zinsen 2,5% bzw. 3,5% beträgt.
 - Die Zahl $3^{4^5} = 3^{(4^5)}$ ist sehr groß. Wie viele Stellen hat diese Zahl? Wie lauten die ersten 6 Ziffern dieser Zahl? Wie lautet die letzte Ziffer dieser Zahl? (Hinweis: Berechnen Sie z.B. $\lg(123)$, $\lg(1230)$, $\lg(12300)$,... ! Was fällt auf ?) Beantworten Sie die Fragen auch für die Zahl $2 \cdot 3^{4^5} + 6$.

