LK Mathematik * Zwei Aufgaben zur Exponentialfunktion

ABI 1980 / I

Gegeben sei die Schar der in R definierten Funktionen $f_a(x) = 4e^{-x}(a - e^{-x})$; $a \in R_0^+$

1. a) Zeigen Sie, dass die Graphen der Schar keine gemeinsamen Punkte besitzen, geben Sie das Verhalten der Graphen für $|x| \to \infty$ an.
   b) Untersuchen Sie die Scharkurven auf Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte und Wendepunkte in Abhängigkeit vom Parameter a und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte.
   c) Bestätigen Sie, dass für $a > 0$ im Bereich $x > -\ln(a)$ gilt : $f_a(x) > 0$.
   d) Die Menge der Extrempunkte der Graphen der Schar bilden eine Kurve. Berechnen Sie die Kurvengleichung dieser Kurve und zeigen Sie, dass diese Kurve und die zu $a = 0$ gehörende Scharkurve zueinander symmetrisch zur x-Achse liegen.
   e) Zeichnen Sie den Graph zu f_1 und die Ortskurve der Extrempunkte in ein gemeinsames Koordinatensystem.
2. Für jedes $a \in R^+$ sei durch $F_a(x) = \int_{-\ln(a)}^{x} f_a(t)\,dt$ im Bereich $D_{F_a} = [-\ln a ; \infty[$ eine Integralfunktion F_a definiert.
   a) Begründen Sie zunächst ohne Berechnung des Integrals, dass F_a jeweils genau eine Nullstelle, Extremstelle und Wendestelle besitzt, und geben Sie diese Stellen an.
   b) Bestimmen Sie nun $F_a(x)$ in integralfreier Darstellung sowie den Wertebereich von F_a.
   [Zur Kontrolle: $F_a(x) = 2(a - e^{-x})^2$]
   c) Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von F_1 in das bereits angelegte Koordinatensystem.
3. Die in Teilaufgabe 2 definierte Funktion F_a besitzt eine Umkehrfunktion F_a^{-1} . Begründen Sie diese Aussage und geben Sie die Funktionsgleichung dieser Umkehrfunktion sowie ihren Definitionsbereich an.

ABI 1981 / I

Gegeben sei die Schar von Funktionen $f_a(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + a)^2}$ mit $a \in R^+$ und $D_{f_a} = R$.

1. a) Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$.
   b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Gleichung $f_a(\ln(a) + t) = f_a(\ln(a) - t)$ für $t \in R$. Welche geometrische Bedeutung hat diese Gleichung für den Graphen von f_a ?
2. a) Zeigen Sie, dass für die Ableitung von f_a gilt: $f_a'(x) = \dfrac{a - e^x}{a + e^x} \cdot f_a(x)$. Bestimmen Sie damit Art und Koordinaten etwa vorhandener Extrema.
   b) Die Extrempunkte liegen auf einer Kurve K . Ermitteln Sie die Gleichung von K .
   c) Skizzieren Sie den Graphen von f_a für $a = 0{,}05$. Berechnen Sie dafür auch die Funktionswerte an den Stellen 0, -1 und -2 . Tragen Sie auch die Kurve K ein.
3. Nun sei $a = 1$ gewählt.
   a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f_1.
   b) Schreiben Sie alle Integralfunktionen und alle Stammfunktionen von f_1 an und prüfen Sie, ob hier jede Stammfunktion auch Integralfunktion ist.
4. Das rechts von der Geraden $x = t$ (mit $t \geq \ln(a)$) zwischen dem Graphen von F_a und der x-Achse liegende (unendliche) Flächenstück wird durch die Kurve $y = \frac{1}{4}e^{-x}$ in zwei Teile zerlegt.
   a) Berechnen Sie die Inhalte dieser Teilflächen.
   b) Für welchen Wert von t sind die beiden Teilflächen gleich groß?