

Komplexe Zahlen * Jahrgangsstufe 11

Gleichungen in \mathbb{C} , die sich auf quadratische und reine Gleichungen zurückführen lassen:

1. $3z^{16} = 2z^8 + 8$

2. $z^3 + 3 = \frac{4}{z^3}$

3. $z^{18} = -iz^9$

4. $z^8 = 15z^4 + 16$

5. $z^3 = 8z^{-3} + 7$

6. $z^{10} + 2 = 2z^5$



Und nun noch zwei rechenaufwändige Gleichungen

7. $z^3 + 1 = \frac{i}{z^3} + i$

8. $z^8 + 4 = (4 + 2i)z^4 - 4i$

Lösungen:

1. $z_k = \sqrt[8]{2} E(k \cdot 45^\circ)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, 7$ und

$$z_n = \sqrt[8]{\frac{4}{3}} E(22,5^\circ + n \cdot 45^\circ) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots, 7$$

2. $z_1 = 1; z_2 = E(120^\circ); z_3 = E(240^\circ); z_4 = \sqrt[3]{4} E(60^\circ); z_5 = \sqrt[3]{4} E(180^\circ); z_6 = \sqrt[3]{4} E(300^\circ)$

3. $z_k = E(30^\circ + k \cdot 40^\circ)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ sowie $z_9 = 0$

4. $z_1 = 2; z_2 = 2i; z_3 = -2; z_4 = -2i; z_5 = E(45^\circ); z_6 = E(135^\circ); z_7 = E(225^\circ); z_8 = E(315^\circ)$

5. $z_1 = 2; z_2 = 2E(120^\circ); z_3 = 2E(240^\circ); z_4 = E(60^\circ); z_5 = E(180^\circ) = -1; z_6 = E(300^\circ)$

6. $z_k = \sqrt[10]{2} E(9^\circ + k \cdot 72^\circ)$ bzw. $z_n = \sqrt[10]{2} E(63^\circ + n \cdot 72^\circ)$ mit $k, n = 0, 1, 2, \dots, 4$

7. $z_1 = E(30^\circ); z_2 = E(150^\circ); z_3 = E(270^\circ) = -i; z_4 = E(60^\circ); z_5 = E(180^\circ) = -1; z_6 = E(300^\circ)$

8. $z_1 = \sqrt[4]{2}; z_2 = \sqrt[4]{2}i; z_3 = -\sqrt[4]{2}; z_4 = -\sqrt[4]{2}i;$

$$z_5 = \sqrt[8]{8} E(11,25^\circ); z_6 = \sqrt[8]{8} E(101,25^\circ); z_7 = \sqrt[8]{8} E(191,25^\circ); z_8 = \sqrt[8]{8} E(281,25^\circ)$$

Ausführliche Lösungen auf der Rückseite!

Ausführliche Lösungen:

- $$\tilde{z} = z^8 ; 3\tilde{z}^2 - 2\tilde{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow \tilde{z}^2 - \frac{2}{3}\tilde{z} - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{z} - 2) \cdot (\tilde{z} + \frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^8 = 2 \text{ bzw. } z^8 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow z^8 = 2E(0^\circ) \text{ bzw. } z^8 = \frac{4}{3}E(180^\circ)$$

$$z^8 = 2E(0^\circ) \text{ hat die Lösungen } z_k = \sqrt[8]{2} E(k \cdot 45^\circ) \text{ mit } k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

$$z^8 = \frac{4}{3}E(180^\circ) \text{ hat die Lösungen } z_n = \sqrt[8]{\frac{4}{3}} E(22,5^\circ + n \cdot 45^\circ) \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots, 7$$
- $$z^3 + 3 = \frac{4}{z^3} \Leftrightarrow z^6 + 3z^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 3u - 4 = 0 \text{ mit } u = z^3$$

$$(u+4) \cdot (u-1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1 ; u_2 = -4 \text{ also } z^3 = 1E(0^\circ) \text{ bzw. } z^3 = 4E(180^\circ)$$

$$z^3 = 1E(0^\circ) \text{ hat die Lösungen } z_1 = 1 ; z_2 = E(120^\circ) ; z_3 = E(240^\circ)$$

$$z^3 = 4E(180^\circ) \text{ hat die Lösungen } z_4 = \sqrt[3]{4} E(60^\circ) ; z_5 = \sqrt[3]{4} E(180^\circ) ; z_6 = \sqrt[3]{4} E(300^\circ)$$
- $$z^{18} = -i z^9 \Leftrightarrow z^9 (z^9 + i) = 0 \Leftrightarrow z^9 = 0 \text{ oder } z^9 = -i = E(270^\circ)$$

also $z_k = E(30^\circ + k \cdot 40^\circ)$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ sowie $z_9 = 0$
- $$z^8 = 15z^4 + 16 \Leftrightarrow u^2 - 15u - 16 = 0 \text{ mit } u = z^4 \Leftrightarrow (u-16) \cdot (u+1) = 0$$

also $z^4 = 16$ bzw. $z^4 = -1 = E(180^\circ)$; die Lösungen lauten damit

$$z_1 = 2 ; z_2 = 2i ; z_3 = -2 ; z_4 = -2i ; z_5 = E(45^\circ) ; z_6 = E(135^\circ) ; z_7 = E(225^\circ) ; z_8 = E(315^\circ)$$
- $$z^3 = 8z^{-3} + 7 \Leftrightarrow z^6 - 7z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 7u - 8 = 0 \text{ mit } u = z^3 \Leftrightarrow$$

$$(u-8) \cdot (u+1) = 0 \text{ also } z^3 = 8 \text{ oder } z^3 = -1 = E(180^\circ) ; \text{ die Lösungen lauten also}$$

$$z_1 = 2 ; z_2 = 2E(120^\circ) ; z_3 = 2E(240^\circ) ; z_4 = E(60^\circ) ; z_5 = E(180^\circ) = -1 ; z_6 = E(300^\circ)$$
- $$z^{10} + 2 = 2z^5 \Leftrightarrow u^2 - 2u + 2 = 0 \text{ mit } u = z^5 \Leftrightarrow (u-1)^2 = -1 \text{ also } u_{1/2} = 1 \pm i$$

$$z^5 = \sqrt{2} E(45^\circ) \text{ oder } z^5 = \sqrt{2} E(315^\circ) \text{ ist also zu lösen; die Lösungen lauten damit}$$

$$z_k = \sqrt[10]{2} E(9^\circ + k \cdot 72^\circ) \text{ bzw. } z_n = \sqrt[10]{2} E(63^\circ + n \cdot 72^\circ) \text{ mit } k, n = 0, 1, 2, \dots, 4$$
- $$z^3 + 1 = \frac{i}{z^3} + i \Leftrightarrow z^6 + (1-i)z^3 - i = 0 \Leftrightarrow u^2 + (1-i)u - i = 0 \text{ mit } u = z^3$$

$$u^2 + (1-i)u - i = 0 \Leftrightarrow (u + \frac{1}{2}(1-i))^2 = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow u_{1/2} = -\frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}E(45^\circ)$$

$$u_{1/2} = -\frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{1}{2}(1+i) \Leftrightarrow u_1 = i ; u_2 = -1 \text{ also } z^3 = E(90^\circ) \text{ bzw. } z^3 = E(180^\circ)$$

$$z_1 = E(30^\circ) ; z_2 = E(150^\circ) ; z_3 = E(270^\circ) = -i ; z_4 = E(60^\circ) ; z_5 = E(180^\circ) = -1 ; z_6 = E(300^\circ)$$
- $$z^8 + 4 = (4+2i)z^4 - 4i \Leftrightarrow u^2 - (4+2i)u + 4 + 4i = 0 \text{ mit } u = z^4$$

$$u^2 - (4+2i)u + 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow [u - (2+i)]^2 - (2+i)^2 + 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow$$

$$[u - (2+i)]^2 = -1 \Leftrightarrow [u - (2+i)]^2 = E(180^\circ) \Leftrightarrow u - (2+i) = \pm i$$

$$u_1 = 2 ; u_2 = 2+2i = 2\sqrt{2} E(45^\circ) \text{ also } z^4 = 2 \text{ oder } z^4 = 2\sqrt{2} E(45^\circ)$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2} ; z_2 = \sqrt[4]{2}i ; z_3 = -\sqrt[4]{2} ; z_4 = -\sqrt[4]{2}i ;$$

$$z_5 = \sqrt[8]{8} E(11,25^\circ) ; z_6 = \sqrt[8]{8} E(101,25^\circ) ; z_7 = \sqrt[8]{8} E(191,25^\circ) ; z_8 = \sqrt[8]{8} E(281,25^\circ)$$