Eine Aufgabe zu Kurvenscharen für die Klasse 11

Gegeben ist die Funktionenschar $g_t(x) = t\,x^3 - (t+1)\,x^2 \quad mit \quad t \in R\backslash\{0\}$

Diskutieren Sie zunächst diese Funktionenschar in Abhängigkeit vom Parameter t.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs.
b) Welche Punkte gehören zu jedem Graphen der Schar. Ermitteln Sie deren Koordinaten.
c) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte in Abhängigkeit von t .
d) Bestimmen Sie alle Wendepunkte in Abhängigkeit von t.
e) Skizzieren Sie die Graphen der Schar mit den Parametern -4, -1, -0.2, 0.5, 1 und 2. (Verwenden Sie hierzu u.U. geeignete Software.)

Mit h_t wird eine weitere Schar $h_t(x) = t\,x^3 - t^3 - t^2 \quad (mit \quad t \in R\backslash\{0\})$ festgelegt.

f) Zeigen Sie, dass sich für jedes $t \neq 0$ und $t \neq -1$ die Graphen von g_t und h_t in zwei Punkten A_t und B_t mit den Koordinaten $A_t(t \;/\; t^4 - t^3 - t^2)$ und $B_t(-t \;/ -t^4 - t^3 - t^2)$ schneiden.
g) Auf welcher Ortskurve liegen die Punkte A_t?
Gibt es unter allen Punkten A_t einen mit kleinster oder größter y-Koordinate? Welches t gehört dazu?

Ergebnisse:

a) Doppelte Nullstelle $x_{1,2} = 0$ und einfache Nullstelle $x_3 = 1 + \frac{1}{t}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} g_t(x) = \pm \text{sgn}(t) \cdot \infty$$

b) P(0/0) und Q(1/-1) gehören zu jedem Graphen der Schar.

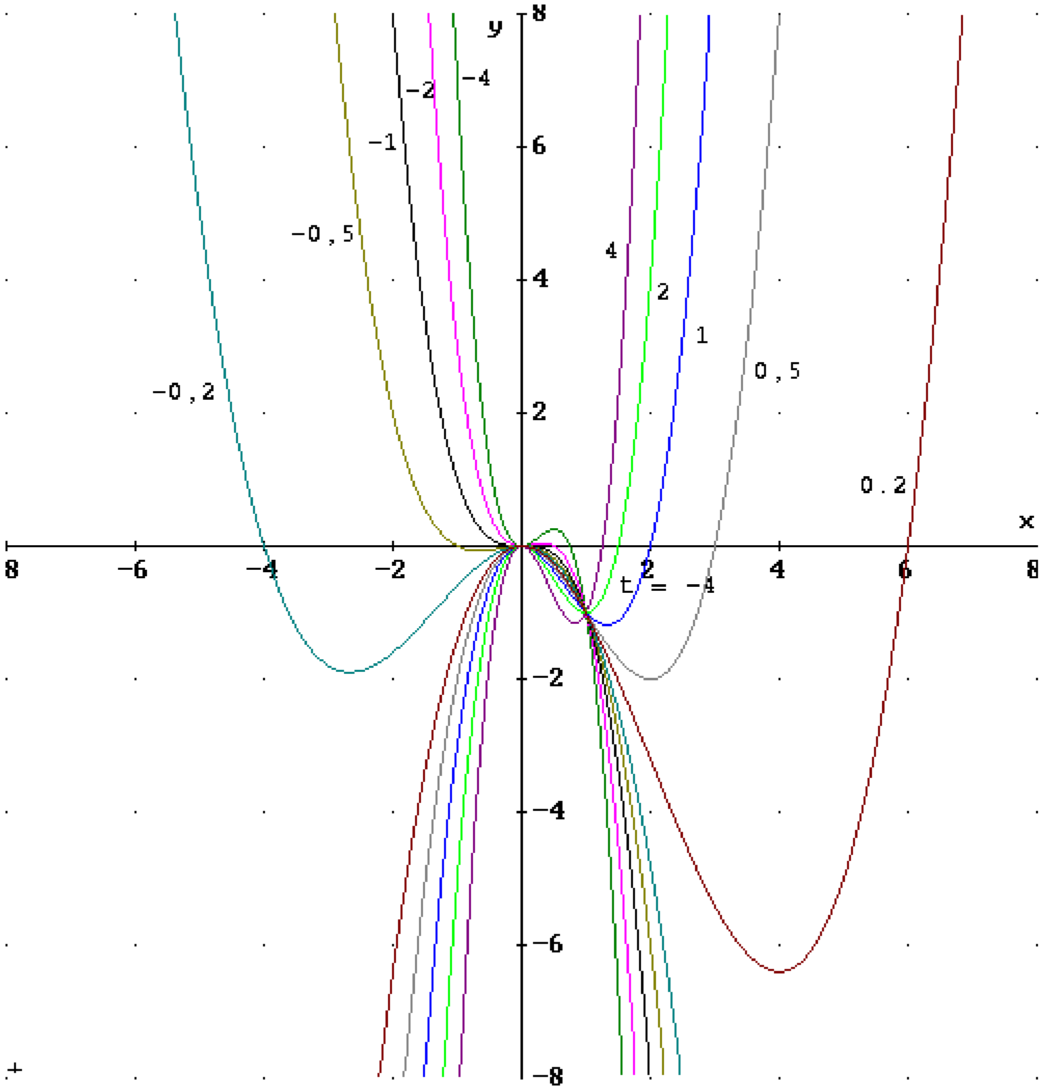
c) HOP(0/0) für $t > -1$ TP(0/0) für $t = -1$ TIP(0/0) für $t < -1$

TIP (≠) für $t > -1$

HOP($\frac{2}{3} + \frac{2}{3t} \;/\; \frac{8t^4 + 20t^3 + 12t^2 - 4t - 4}{27t^3}$) für $t < -1$

d) WP ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3t} \;/\; \frac{t^4 + 2t^3 - 2t - 1}{27t^3}$) für $t \neq 0$

e)



f) $g_t(x) = h_t(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = t^2 \quad \textit{falls } t \neq -1 \quad \Leftrightarrow$

$x_{4/5} = \pm t \quad \textit{und} \quad A_t = (t \;/\; h_t(t)) \quad \textit{und} \quad B_t = (-t \;/\; h_t(t))$

g) Ortskurve $a(x) = x^4 - x^3 - x^2 \quad \textit{mit} \quad x \neq 0 \;\; \textit{und} \;\; x \neq -1.$

Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} a(x) = +\infty$ gibt es keinen Punkt A_t mit größter y-Koordinate.

Die Funktion a (x) hat zwei lokale Minima bei $\dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$

Bei $x_{min} = \dfrac{3+\sqrt{41}}{8} \approx 1{,}175$ liegt das absolute Minimum

$y_{min} = \dfrac{-299 - 41\sqrt{41}}{512} \approx -1{,}097$

Zu $t_{min} = x_{min} = \dfrac{3+\sqrt{41}}{8} \approx 1{,}175$ gehört also der Punkt A_t mit den Koordinaten $(x_{min} \;/\; y_{min})$, der den kleinsten y-Wert hat.