1. Schulaufgabe aus der Mathematik, Jahrgangsstufe 11, November 2005

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{x^3 - 4x}$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f .

   b) Prüfen Sie den Graphen von f auf Symmetrie!

   c) Geben Sie $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ an!

2. Geben Sie die Funktion f abschnittsweise ohne Betrag und Signumfunktion an.
   Skizzieren Sie dann sauber den Graphen!

   $$f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x+2} \cdot \operatorname{sgn}(x-2)$$

3. a) Bestimmen Sie den Grenzwert a = $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 5}{4 + 2x}$ mit Hilfe der Grenzwertsätze.

   Beweisen Sie dann mit der exakten Definition des Grenzwertes, dass der von Ihnen gefundene Wert für a korrekt ist.

   b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$.

4. Berechnen Sie und geben Sie das Endergebnis in Normalform an.

   $$\frac{\sqrt{2}\, E(45^o)}{1 + 3i} \cdot \left(7i - \frac{(i+1)^2}{i} \right) =$$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung! (Grundmenge G = $\mathbb{C}$)
   (z^* gibt die zu z konjugiert komplexe Zahl an.)

   a) $z + (3i - 1) \cdot z^* = 4$

   b) $(z+1)^2 = -8$

Aufgabe	1a	b	c	2	3a	b	4	5a	b	Σ
Punkte	4	2	3	7	7	4	7	6	5	45

Gutes Gelingen! G.R.

Lösungen zur 1. Schulaufgabe aus der Mathematik, Jahrgangsstufe 11, November 2005

1. a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x^3-4x}$ $\quad$ *Nenner*: $x^3 - 4x = x\cdot(x^2-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0\,;\; x_{2/3} = \pm 2$

   Zähler: $5 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 5 \geq x^2 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

   also $D_f = [-\sqrt{5}\,;\,+\sqrt{5}\,] \setminus \{-2\,;0\,;2\}$ $\quad$ Nullstellen: $x_{4/5} = \pm\sqrt{5}$

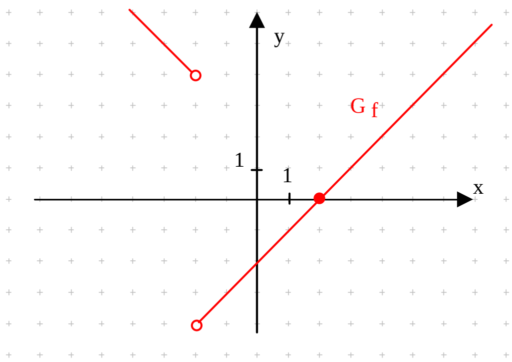
   b) $f(-x) = \dfrac{\sqrt{5-(-x)^2}}{(-x)^3-4(-x)} = \dfrac{\sqrt{5-x^2}}{-(x^3-4x)} = -f(x)$ $\qquad$ G_f ist punktsymmetrisch

   c) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0 \\ <}} \dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x^3-4x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0 \\ <}} \dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x\cdot(x^2-4)} = \text{"}\dfrac{\sqrt{5}}{\pm 0\cdot(-4)}\text{"} = \mp\infty$

2. $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x+2}\cdot \operatorname{sgn}(x-2) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}\cdot\operatorname{sgn}(x-2) & ;\; x<-2 \;\; oder \;\; x>2 \\ 0 & ;\; x=2 \\ \dfrac{-(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}\cdot\operatorname{sgn}(x-2) & ;\; -2<x<2 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & ;\; x<-2 \\ x-2 & ;\; -2<x<2 \\ 0 & ;\; x=2 \\ x-2 & ;\; 2<x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & ;\; x<-2 \\ x-2 & ;\; -2<x \end{cases}$$



3. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{4+2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cdot(3-\frac{5}{x})}{x\cdot(\frac{4}{x}+2)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-\frac{5}{x}}{\frac{4}{x}+2} = \dfrac{3-0}{0+2} = \dfrac{3}{2}$

   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-5}{4+2x} = \dfrac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon>0 \;\exists\, x_o = \dfrac{11}{2\varepsilon} \;\; \forall\, x>x_o$ *gilt*:

   $\left|\dfrac{3x-5}{4+2x} - \dfrac{3}{2}\right| = \left|\dfrac{3x-5-3(2+x)}{4+2x}\right| = \left|\dfrac{-11}{4+2x}\right| < \left|\dfrac{11}{2x}\right| < \left|\dfrac{11}{2x_o}\right| = \dfrac{11}{2x_o} = \varepsilon$

   b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+x^2-3x-2}{x^2-4} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x^2-x-1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-1}{x-2}$

   $= \dfrac{4+2-1}{-2-2} = -1{,}25$

   NR: Polynomdivision $\qquad (x^3+x^2-3x-2):(x+2) = x^2-x-1$

4. $\dfrac{\sqrt{2}\,E(45^o)}{1+3i}\cdot\left(7i-\dfrac{(i+1)^2}{i}\right)=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\ i\right)}{1+3i}\cdot\left(7i-\dfrac{i^2+2i+1}{i}\right)=$

$\dfrac{(1+i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}\cdot\left(7i-\dfrac{2i}{i}\right)=\dfrac{4-2i}{10}\cdot(7i-2)=\dfrac{6+32i}{10}=0{,}6+3{,}2i$

5. a) $z+(3i-1)\cdot z^*=4 \quad\Leftrightarrow\quad x+iy+(3i-1)\cdot(x-iy)=4 \quad\Leftrightarrow$

$x+iy+3ix+3y-x+\ iy\ =4 \quad\Leftrightarrow\quad 3y=4 \quad und \quad 2y+3x=0 \quad\Leftrightarrow$

$y=\dfrac{4}{3} \quad und \quad x=-\dfrac{8}{3}:3=-\dfrac{8}{9}$

Die Lösung lautet also $\quad z=-\dfrac{8}{9}+\dfrac{4}{3}\ i$

b) $(z+1)^2=-8 \quad\Leftrightarrow\quad (z+1)^2\ =8\cdot\ E(180^o) \quad\Leftrightarrow\quad z_{1/2}+1=\pm\sqrt{8}\cdot E(90^o) \quad\Leftrightarrow$

$z_{1/2}=-1\ \pm\ 2\sqrt{2}\ i$