2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 27.01.2006

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{3x} + 1$.

   Bestimmen Sie die Steigung der Tangente im Punkt $P(2/\sqrt{6}+1)$ des Graphen G_f mit Hilfe der Grenzwertberechnung des zugehörigen Differenzenquotienten.

2. Bestimmen Sie mit einer geeigneten Rechnung alle Intervalle, in denen die Funktion g mit $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ ($D_g = R^+$) streng monoton steigt.

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}9x^2 - 0{,}2x^3$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.
   Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

   b) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen G_f .

   c) Zeichnen Sie den Graphen sauber in ein Koordinatensystem.

4. Lösen Sie die beiden Gleichungen in der Menge der komplexen Zahlen.

   a) $z^2 + (2-2i)\cdot z = i + \dfrac{3}{4}$

   b) $\sqrt{2}\cdot z^3 - 2i = 2$

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1	2	3a	b	c	4a	b	Σ
Punkte	6	6	4	6	3	10	6	41

2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 27.01.2006 * Lösung

1. $f(x) = \sqrt{3x} + 1$;

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x}+1-\sqrt{6}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{3x}+\sqrt{6})}{(x-2)\cdot(\sqrt{3x}+\sqrt{6})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3x-6}{(x-2)\cdot(\sqrt{3x}+\sqrt{6})} = \lim_{x\to 2}\frac{3\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(\sqrt{3x}+\sqrt{6})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{3}{(\sqrt{3x}+\sqrt{6})} = \frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{6}} = \frac{3}{2\cdot\sqrt{6}} = \frac{3\cdot\sqrt{6}}{2\cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

2. $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} = 2\cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; g'(x) = 2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} =$

$g'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{4\cdot\sqrt{x}} = \frac{-4+x}{4x\sqrt{x}}$; ($D_g = R^+$)

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ *und* $g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 4$

Die Funktion g ist also nur im Intervall [4 ; ∞ [streng monoton wachsend.

3. $f(x) = 0{,}9x^2 - 0{,}2x^3$

a) $D_f = R$; $NSt.$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}1\cdot x^2\cdot(9-2x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$; $x_3 = 4{,}5$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 0{,}1x^2\cdot(9-2x) = "(+\infty)\cdot(\mp\infty)" = \mp\infty$

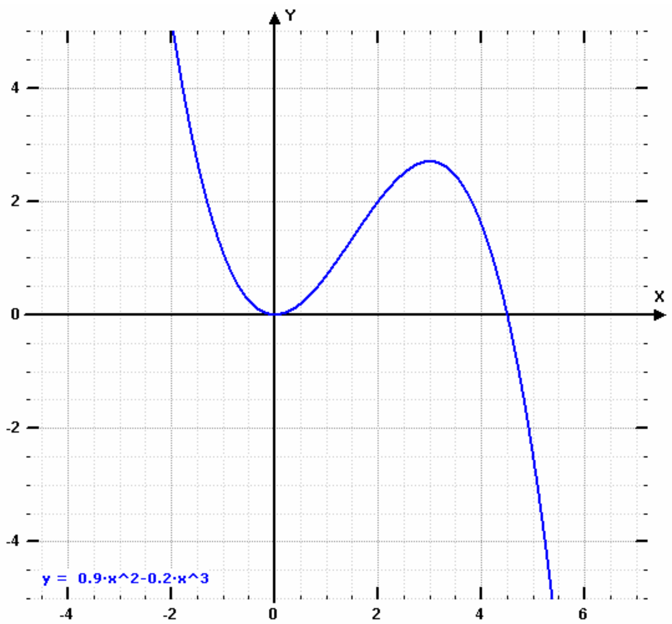
b) $f(x) = 0{,}9x^2 - 0{,}2x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 1{,}8x - 0{,}6x^2 = 0{,}6x\cdot(3-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}6x\cdot(3-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 3$; $y_1 = 0$ und $y_2 = 2{,}7$

wegen Nullstellen und dem Grenzwertverhalten gilt:

Tiefpunkt TIP (0 / 0) und Hochpunkt HOP (3 / 2,7)

c)



4. a) $z^2 + (2-2i)\cdot z = i + \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (z+(1-i))^2 - (1-i)^2 = i + \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow$

$(z+(1-i))^2 - 1 + 2i + 1 = i + \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (z+(1-i))^2 = -i + \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow$

mit $x + iy = \tilde{z} = z + (1-i)$ folgt

$(x+iy)^2 = -i + \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad$ (1) $x^2 - y^2 = \frac{3}{4}$ und (2) $2xy = -1$

aus (2) folgt $y = -\frac{1}{2x}$; eingesetzt in (1) also $x^2 - \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{4} = 0$

$x^2 - \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-1)\cdot(x^2 + \frac{1}{4}) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$ und damit $y_{1/2} = \mp \frac{1}{2}$

$z_{1/2} + (1-i) = \tilde{z}_{1/2} = x_{1/2} + i\, y_{1/2} = \pm 1 \mp \frac{1}{2} i$

$\Rightarrow \quad z_{1/2} = \pm 1 \mp \frac{1}{2} i - 1 + i \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{1}{2} i \;\; \textit{und} \;\; z_2 = -2 + \frac{3}{2} i$

b) $\sqrt{2}\cdot z^3 - 2i = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = \frac{2+2i}{\sqrt{2}}$

mit $\frac{2+2i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 \cdot \sqrt{2}\cdot E(45^o) = 2\cdot E(45^o)$ folgt

$z^3 = 2E(45^o) \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\, E(\frac{45^o}{3}) = \sqrt[3]{2}\, E(15^o)$;

$z_2 = \sqrt[3]{2}\, E(15^o + \frac{360^o}{3}) = \sqrt[3]{2}\, E(135^o)$

$z_3 = \sqrt[3]{2}\, E(15^o + \frac{2\cdot 360^o}{3}) = \sqrt[3]{2}\, E(255^o)$