3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 31.03.2006

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{6x}{4x^2 + 9}$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.
   Ist der Graph von f symmetrisch?
   Wie verhält sich die Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs?

   b) Bestimmen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung von f und Ihren Ergebnissen aus a) den Wertebereich W_f der Funktion f.

2. Paul behauptet, dass es eine Polynomfunktion f dritten Grades mit den drei folgenden Eigenschaften gibt:

   (1) f hat eine Nullstelle bei $x_1 = 1$
   (2) G_f hat einen Hochpunkt (- 3 / ?)
   (3) G_f hat den Wendepunkt (- 1 / 2)

   Prüfen Sie mit geeigneter Rechnung, ob Pauls Behauptung wahr ist!

3. Bearbeiten Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

4. Mr. Brown will von New York ($40{,}7^\circ$ nördlich / $73{,}8^\circ$ westlich) nach Europa fliegen. Da er sich umständliche Navigationsarbeit ersparen will, fliegt er immer genau in Richtung Osten. Nach 5800 km muss er aber wegen Treibstoffmangels in Ávila landen. Ávila befindet sich in Spanien und liegt 120 km westlich von Madrid.

   a) Berechnen Sie die geographischen Koordinaten von Ávila.

   b) Mr. Brown hätte Ávila auf einem kürzeren Weg erreichen können.
   Bestimme Sie die Länge dieses kürzesten Flugweges von New York nach Ávila.
   Hätte Mr. Brown ohne Zwischenlandung Madrid erreichen können?

   (Erdradius R = 6370 km)

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	2	3a	b	4a	b	Σ
Punkte	4	8	8	6	4	8	12	50

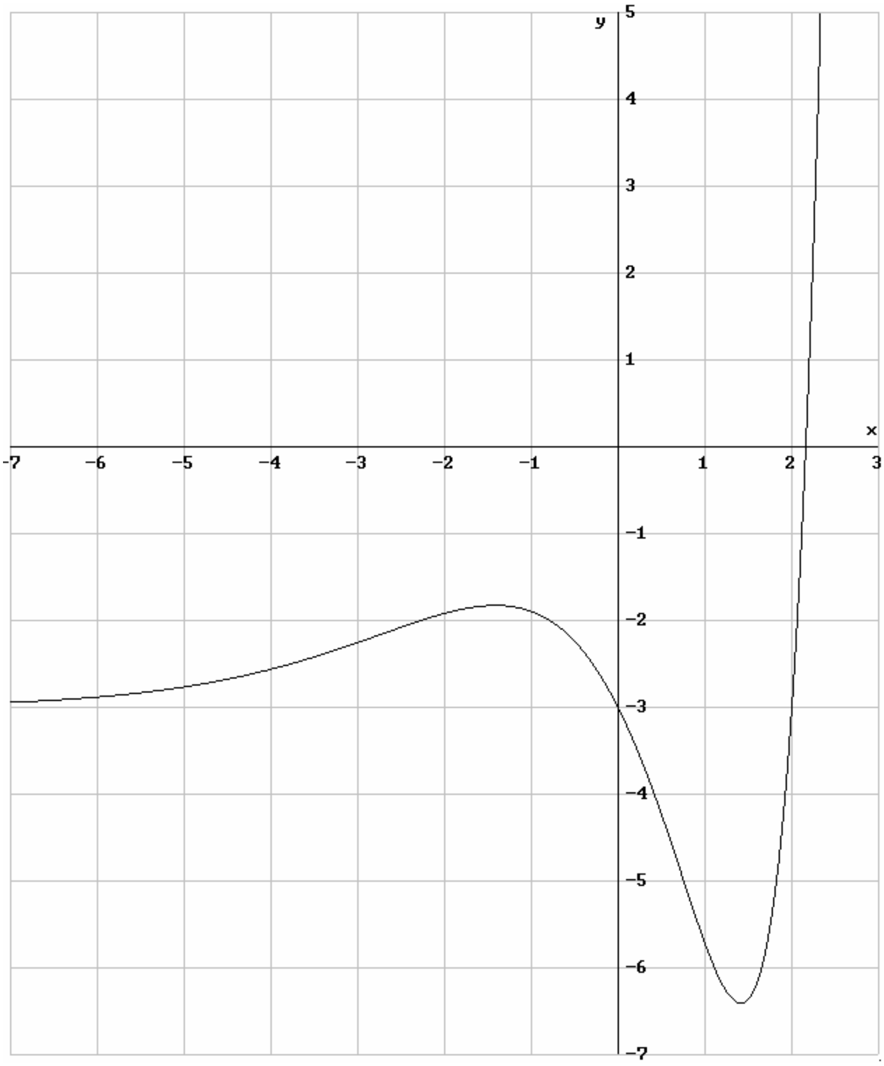
Arbeitsblatt zur 3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 31.03.2006

Name: ....

3. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f.

   a) Tragen Sie in das Bild möglichst genau den Graphen der 1. Ableitung von f ein.

   b) Geben Sie alle Intervalle an, in denen für die 2. Ableitung von f gilt: $f''(x) < 0$
   Welche Bedeutung hat $f''(x) < 0$ für den Graphen von f ?



3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 31.03.2006 * Lösungen

1. $f(x) = \dfrac{6x}{4x^2+9}$

   a) $D_f = \mathbb{R}$; NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$;

   $f(-x) = -f(x)$ d.h. G_f ist punktsymmetrisch

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{4x+\frac{9}{x}} = \text{"}\frac{6}{\pm\infty \pm 0}\text{"} = \pm 0$$

   b) $$f'(x) = \frac{(4x^2+9)\cdot 6 - 6x\cdot 8x}{(4x^2+9)^2} = \frac{24x^2+54-48x^2}{(4x^2+9)^2} = \frac{54-24x^2}{(4x^2+9)^2}$$

   hor.Tg.: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 24x^2 = 54 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm 1{,}5$

   für $x > 0$ gilt $f(x) > 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +0$ und $f'(1{,}5) = 0$ d.h.

   (1,5 / f(1,5)) ist ein Hochpunkt und wegen der Symmetrie damit (-1,5 / -f(1,5)) ein Tiefpunkt.

   $f(1{,}5) = \dfrac{6\cdot 1{,}5}{4\cdot 1{,}5^2+9} = \dfrac{9}{9+9} = \dfrac{1}{2}$; also $W_f = [-\frac{1}{2}\,;+\frac{1}{2}]$

2. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   und damit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$ (und $f'''(x) = 6a$)

   (1) $f(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$
   (2) $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow 27a - 6b + c = 0$
   (3) $f''(-1) = 0 \Leftrightarrow -6a + 2b = 0 \Leftrightarrow$ b = 3a eingesetzt in (1), (2), (3)
   (4) $f(-1) = 2 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 2$

   (1) $4a + c + d = 0$
   (2) $9a + c = 0 \Leftrightarrow$ c = - 9a eingesetzt in (1), (3)
   (3) $2a - c + d = 2$

   (1) $-5a + d = 0 \Leftrightarrow$ d = 5a eingesetzt in (3)
   (3) $11a + d = 2 \Leftrightarrow 16a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$

   also $d = \frac{5}{8}$ und $c = -\frac{9}{8}$ und $b = \frac{3}{8}$ also $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{5}{8}$

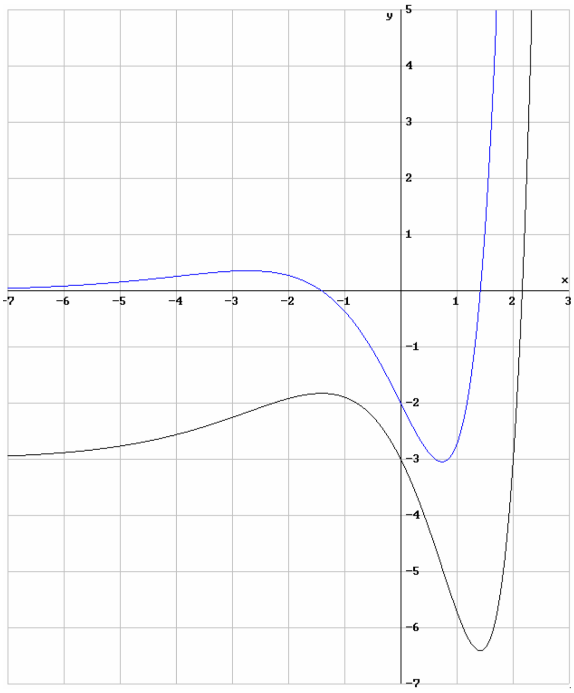
   (-1/2) ist eine Wendepunkt wegen $f'''(-1) = \frac{6}{8} \neq 0$ und

   (-3/-0,4) ist ein Hochpunkt wegen $f''(-3) = -\frac{18}{8} + \frac{6}{8} = -\frac{3}{4} < 0$

   Damit ist Pauls Behauptung wahr!

3. a)
Der Graph der Ableitungsfunktion f ´(x) ist hier rot eingezeichnet.

(Es gilt übrigens:
$f(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x - 3$
mit $e = 2{,}7182...$)



b)
$f''(x) < 0 \iff$
$x \in \,]-2{,}6 \,;\, +0{,}8[$

In diesem Intervall ist
Der Graph von f
„rechtsgekrümmt“.

4. a) $r = R \cdot \cos(\varphi) = 6370\,\text{km} \cdot \cos(40{,}7^\circ) = 4829\,\text{km}$

$$b = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta\lambda}{360^\circ} \quad \text{mit} \quad b = 5800\,\text{km} \quad \Rightarrow$$

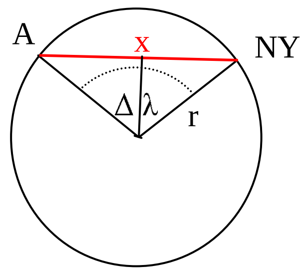
$$\Delta\lambda = \frac{b}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot 360^\circ = \frac{5800}{2 \cdot \pi \cdot 4829} \cdot 360^\circ = 68{,}8^\circ$$

$\lambda_A = \lambda_{NY} - \Delta\lambda = 73{,}8^\circ - 68{,}8^\circ = 5{,}0^\circ$ also Ávila ($40{,}7^\circ$ nördl. / $5{,}0^\circ$ westl.)

b)

$$\frac{\frac{x}{2}}{r} = \sin\left(\frac{68{,}8^\circ}{2}\right) \Rightarrow$$

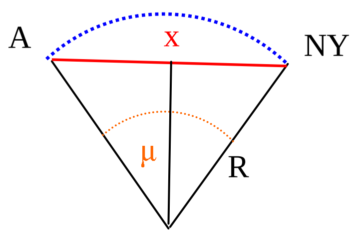
$$x = 2 \cdot 4829\text{km} \cdot \sin(34{,}4^\circ) = 5456\,\text{km}$$



$$\frac{\frac{x}{2}}{R} = \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu}{2} = \operatorname{inv}\sin\left(\frac{5456\,\text{km}}{2 \cdot 6370\,\text{km}}\right) \Rightarrow$$

$$\mu = 50{,}7^\circ$$



$$\overset{\frown}{d}_{NY,A} = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot \frac{\mu}{360^\circ} = 2 \cdot 6370\,\text{km} \cdot \pi \cdot \frac{50{,}7^\circ}{360^\circ} = 5637\,\text{km}$$

Der kürzeste Weg von New York nach Ávila (Großkreisbogen) hat die Länge 5637 km.
Der Treibstoff hätte also für weitere 5800 km – 5637 km = 163 km > 120 km gereicht. Mr. Brown konnte damit Madrid ohne Zwischenlandung erreichen.