4. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 02.06.2006

1. Die Kurvenschar $f_k(x) = k \cdot x^3 - 3k^2 \cdot x$ mit $k \geq 4$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen in Abhängigkeit von k.

   b) Zeigen Sie, dass jede Kurve der Schar einen Tiefpunkt hat und bestimmen Sie dessen Koordinaten in Abhängigkeit von k.

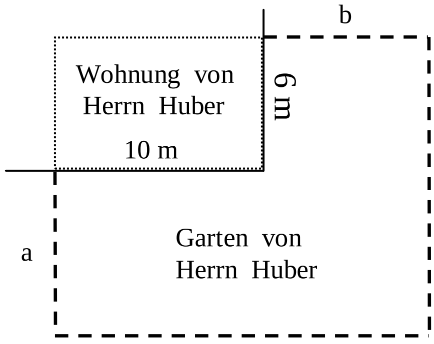
   c) Auf welcher Ortskurve liegen die in b) berechneten Tiefpunkte? Geben Sie auch den zugehörigen Definitionsbereich an!

   d) Gibt es unter den in b) berechneten Tiefpunkten einen „höchsten“ oder „tiefsten“? Geben Sie gegebenenfalls dessen Koordinaten an!

2. Herr Huber wohnt in einem Eckhaus und darf mit einem Zaun der Länge 60m wie im Bild dargestellt seinen Garten abgrenzen. (Der Zaun ist im Bild gestrichelt gezeichnet; an der Hauswand wird natürlich kein Zaun benötigt!)

   Wie muss Herr Huber die Längen a und b wählen, damit seine Gartenfläche maximale Größe hat? Bestimmen Sie diese maximale Fläche!

   (Teilergebnis: a + b = 22m)

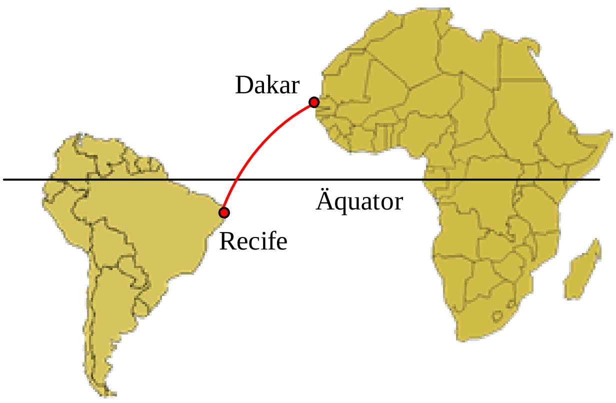


Zaunlänge insgesamt: 60m

3. Von Recife (8,1° südl. / 34,9° westl.) im Nordosten Brasiliens kann man mit dem Schiff auf dem kürzesten Weg nach Dakar (14,7° nördl. / 17,4° westl.) im Senegal fahren, wenn man unter einem Kurswinkel von 37,34° startet. (D.h. der Winkel zwischen Nordrichtung und Abfahrtsrichtung beträgt 37,34°.)

   a) Fertigen Sie eine Skizze an, in der alle gegebenen Größen eingetragen sind. Bei welcher geographischen Länge überquert man den Äquator? (Ergebnis: 28,76° westl.)

   b) Bestimmen Sie die Entfernung Recife – Dakar in Kilometer. (R_{Erde} = 6370 km bzw. 1 Seemeile = 1,852 km)



Aufgabe	1a	b	c	d	2	3a	b	Σ
Punkte	2	6	3	2	9	8	7	37

Gutes Gelingen! G.R.

4. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11b, 02.06.2006 * Lösung

1. a) $f_k(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kx\cdot(x^2-3k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0\ ;\ x_{2/3} = \pm\sqrt{3k}$

   b) $f_k(x) = k\cdot x^3 - 3k^2\cdot x \quad \Rightarrow \quad f_k'(x) = 3k\cdot x^2 - 3k^2 \quad$ und $\quad f_k''(x) = 6k\cdot x$

   hor.Tg.: $f_k'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3k\cdot x^2 - 3k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3k\cdot(x^2-k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{4/5} = \pm\sqrt{k}$

   $y_{4/5} = f_k(x_{4/5}) = k\cdot(\pm\sqrt{k})^3 - 3k^2\cdot(\pm\sqrt{k}) = \pm k^2\sqrt{k} \mp 3k^2\sqrt{k} = \mp 2k^2\sqrt{k}$

   $f_k''(x_{4/5}) = 6k\cdot(\pm\sqrt{k}) = \pm 6k\sqrt{k} \quad ; \quad f_k''(x_4) > 0$ und $f_k''(x_5) < 0 \quad \Rightarrow$

   $\mathrm{TIP}(\sqrt{k}\ ;\ -2k^2\sqrt{k})$ und $\mathrm{HOP}(-\sqrt{k}\ ;\ 2k^2\sqrt{k})$

   c) $\mathrm{TIP}(\sqrt{k}\ ;\ -2k^2\sqrt{k}) \quad x_T = \sqrt{k}$ und $k \geq 4$ d.h. $x_T \geq 2$ und $k = x_T^{\,2}$

   $y_T = -2k^2\sqrt{k} = -2(x_T^{\,2})^2\cdot x_T = -2x_T^{\,5}$ also gilt für die Ortskurve der Tiefpunkte:

   $t(x) = -2x^5$ mit $x \in [\,2\,;\,\infty\,[$

   d) $t'(x) = -10x^4 < 0$ für $x \in [\,2\,;\,\infty\,[$, d.h. t ist eine streng monoton fallende Funktion.
   Der höchste Tiefpunkt liegt daher bei $x_h = 2$ und hat die Koordinaten (2 / - 64).

2. Zaunlänge: $60\mathrm{m} = a + b + 10\mathrm{m} + a + 6\mathrm{m} + b = 2a + 2b + 16\mathrm{m} \quad \Rightarrow$

   $30\mathrm{m} = a + b + 8\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad a + b = 22\mathrm{m}$

   $F = (a + 6\mathrm{m})\cdot(b + 10\mathrm{m}) - 6\mathrm{m}\cdot 10\mathrm{m} = a\cdot b + 10\mathrm{m}\cdot a + 6\mathrm{m}\cdot b$ mit $a + b = 22\mathrm{m}$ folgt

   $F = F(a) = a\cdot(22\mathrm{m} - a) + 10\mathrm{m}\cdot a + 6\mathrm{m}\cdot(22\mathrm{m} - a) = -a^2 + (22\mathrm{m} + 10\mathrm{m} - 6\mathrm{m})\cdot a + 132\,\mathrm{m}^2$

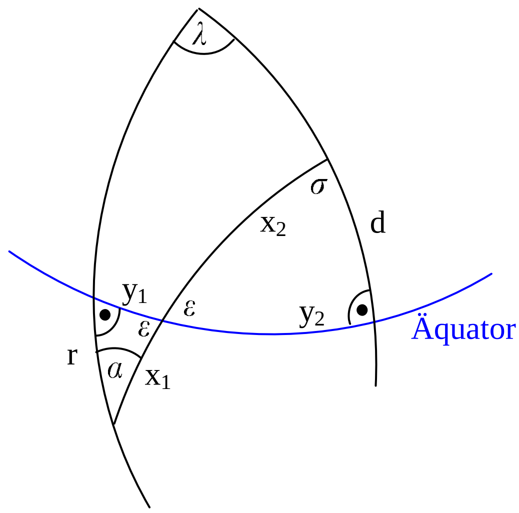
   $F(a) = -a^2 + 26\mathrm{m}\cdot a + 132\,\mathrm{m}^2$ und $F'(a) = -2a + 26\mathrm{m}$

   $F'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 26\mathrm{m} \quad \Leftrightarrow \quad a = 13\mathrm{m}$ (und $b = 9\mathrm{m}$)

   $F''(a) = -2 < 0$, d.h. für $a = 13\mathrm{m}$ ist der Flächeninhalt maximal.

   $F_{max} = F(13\mathrm{m}) = -169\mathrm{m}^2 + 26\mathrm{m}\cdot 13\mathrm{m} + 132\,\mathrm{m}^2 = 301\mathrm{m}^2$

3. a) Bekannt sind:
   $\alpha = 37{,}34^\circ \ ;\ r = 8{,}1^\circ \ ;\ d = 14{,}7^\circ$
   $\lambda = 34{,}9^\circ - 17{,}4^\circ = 17{,}5^\circ = y_1 + y_2$



   Neper:
   $\cos(90^\circ - r) = \cot(90^\circ - y_1)\cdot\cot(\alpha) \quad \Rightarrow$

   $\sin(r) = \dfrac{\tan(y_1)}{\tan(\alpha)} \quad \Rightarrow$

   $\tan(y_1) = \sin(8{,}1^\circ)\cdot\tan(37{,}34^\circ) \quad \Rightarrow$

   $y_1 = 6{,}14^\circ$ und $34{,}9 - 6{,}14^\circ = 28{,}76^\circ$

   Der Äquator wird also bei der geographischen Länge $28{,}76^\circ$ westl. überquert.

   b) Neper: $\cos(\alpha) = \cot(90^\circ - r)\cdot\cot(x_1) \quad \Rightarrow$

   $\cos(\alpha) = \tan(r) : \tan(x_1) \quad \Rightarrow \quad \tan(x_1) = \tan(8{,}1^\circ) : \cos(37{,}34^\circ) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10{,}15^\circ$

   $y_2 = \lambda - y_1 = 17{,}5^\circ - 6{,}14^\circ = 11{,}36^\circ$

   Neper: $\cos(x_2) = \sin(90^\circ - d)\cdot\sin(90^\circ - y_2) = \cos(14{,}7^\circ)\cdot\cos(11{,}36^\circ) \quad \Rightarrow$

   $x_2 = 18{,}50^\circ$ und damit

   $x = x_1 + x_2 = 10{,}15^\circ + 18{,}50^\circ = 28{,}65^\circ \mathrel{\widehat{=}} 28{,}65\cdot 60\cdot 1{,}852\,\mathrm{km} = 3{,}18\cdot 10^3\,\mathrm{km}$