3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11b (mn), 12.04.2002

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2\sqrt{x^2 - 1}}$.

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f und prüfen Sie den Graphen auf Symmetrie!

   b) Berechnen Sie die Ableitung f´ von f .
   (Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{2(x^2 - 1)^{1,5}}$)

   c) Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen f streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend ist.

   d) Hat der Graph von f Hoch- bzw. Tiefpunkte?
   Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!

2. Lösen Sie diese Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

3. San Francisco liegt an der Westküste der USA mit den geographischen Koordinaten $37{,}7^{\circ}$ nördl. und $122{,}5^{\circ}$ westl. Gr. (Erdradius R = 6370 km)
   Segelt man von San Francisco immer genau in Richtung Westen 8488 km weit, so erreicht man die Ostküste Japans bei der Stadt Sendai.

   a) Bestimmen Sie die geographischen Koordinaten von Sendai!

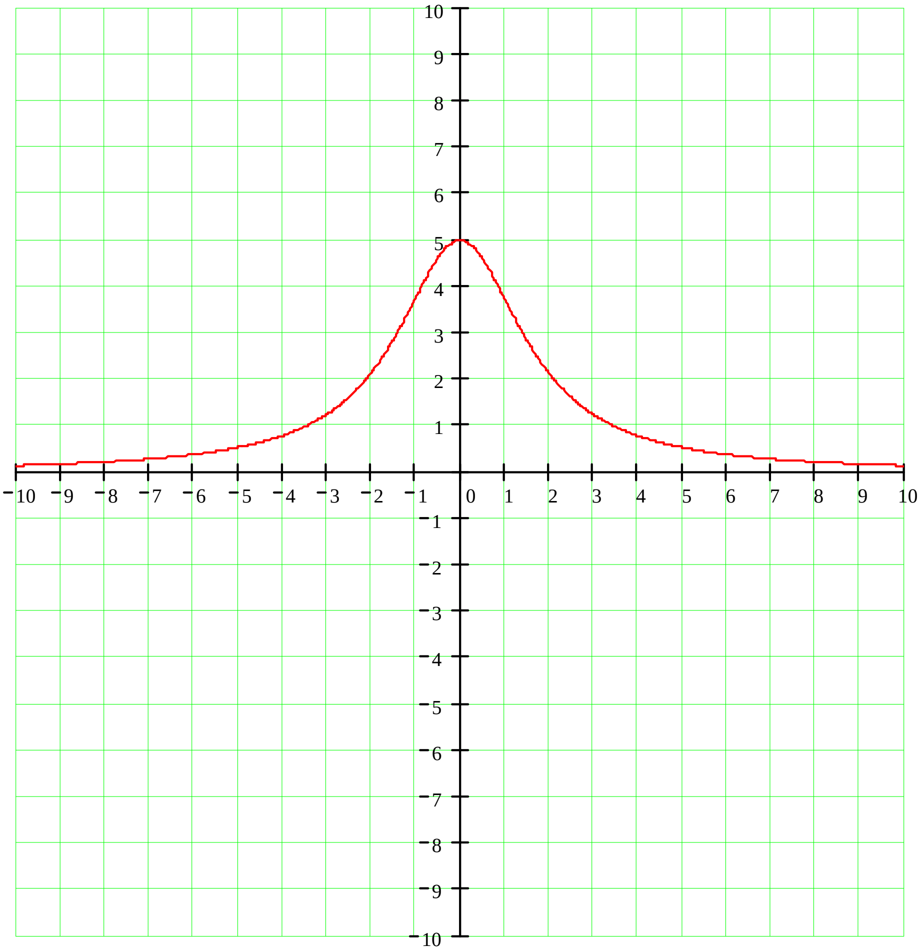
   b) Um wie viel Prozent ist der gesegelte Weg von 8488 km länger als der kürzest mögliche Weg auf der Erdkugel von San Francisco nach Sendai?

Gutes Gelingen! G.R.

Arbeitsblatt zur 3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11b (mn), 12.04.2002

Name: ....

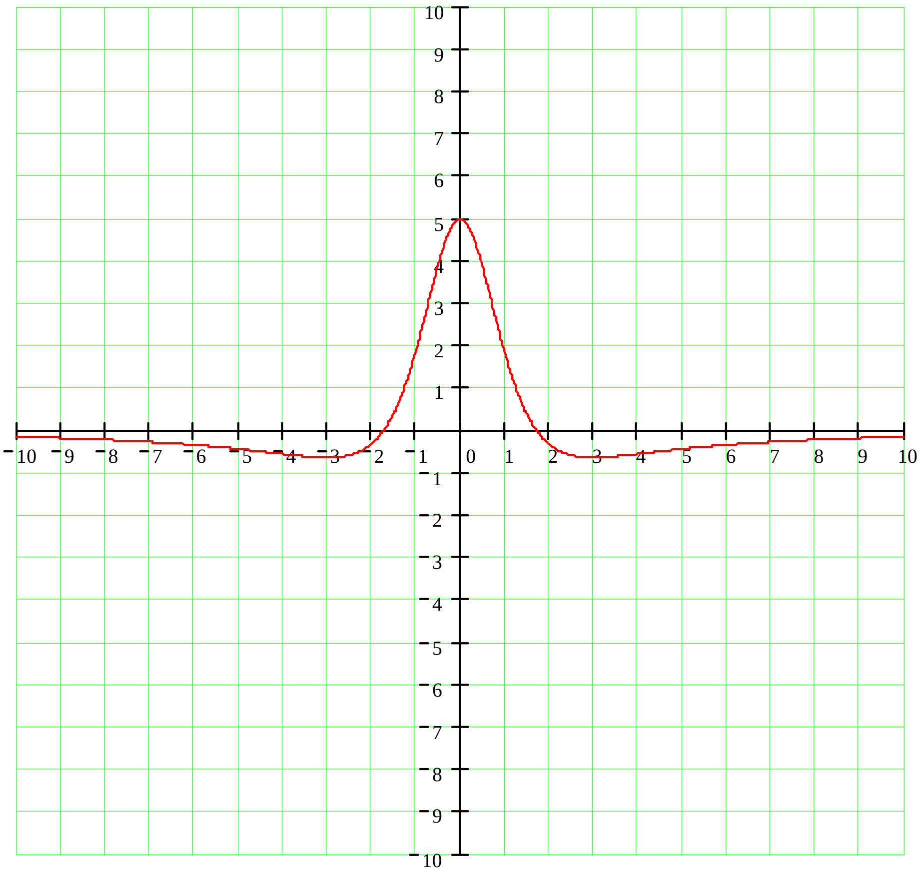
2\. a) Im folgenden Diagramm ist der Graph einer Funktion f dargestellt.
Zeichnen Sie in das Diagramm möglichst genau den Graph der **Ableitungsfunktion f ´** von f.



2\. b) G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Hat der Graph von f ´ auch eine Symmetrie?

Bitte für die Aufgabe 2c) das Arbeitsblatt wenden!

2. c) Im folgenden Diagramm ist der Graph der Ableitung f' einer Funktion f dargestellt.
Für die Funktion f soll dabei gelten: $\mathbf{f(0) = 0}$
Zeichnen Sie in das Diagramm sauber und möglichst genau den Graph der **Funktion f** .



Lösungen:

1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1;1]$ $f(-x) = f(x)$, d.h. G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

b) $$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-1}\cdot 2x - (x^2+2)\cdot 2\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x)}{4(x^2-1)} = \frac{2(x^2-1)\cdot 2x - (x^2+2)\cdot 2x}{4(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{4x^2-4x-2x^2-4x}{4(x^2-1)^{1,5}} = \frac{2x^2-8x}{4(x^2-1)^{1,5}} = \frac{x^2-4x}{2(x^2-1)^{1,5}}$$

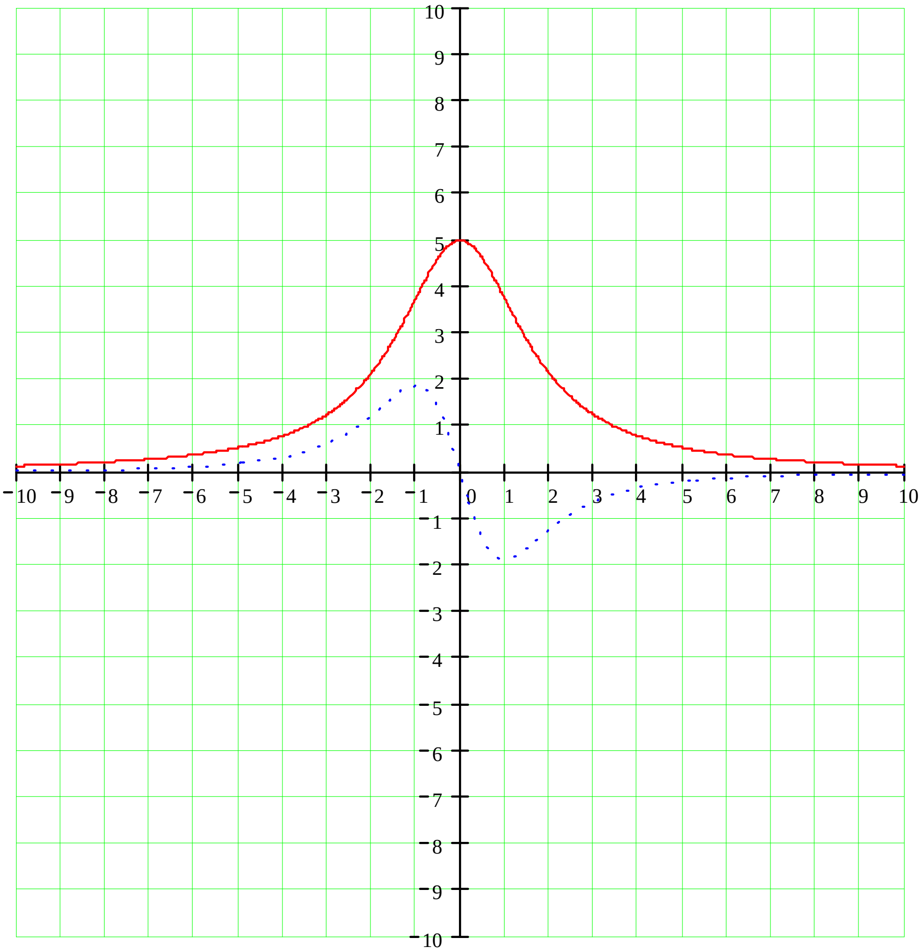
c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow (x_o = 0 \notin D_f)\quad x_{1/2} = \pm 2$

x	x < -2	x = -2	-2 < x < -1	1 < x < 2	x = 2	2 < x
f '(x)	f '(x) < 0	0	f '(x) > 0	f '(x) < 0	0	f '(x) > 0

f ist streng monoton steigend in $[-2; -1[$ und in $[2; \infty[$;
f ist streng monoton fallend in $]-\infty; -2]$ und in $]1; 2]$.

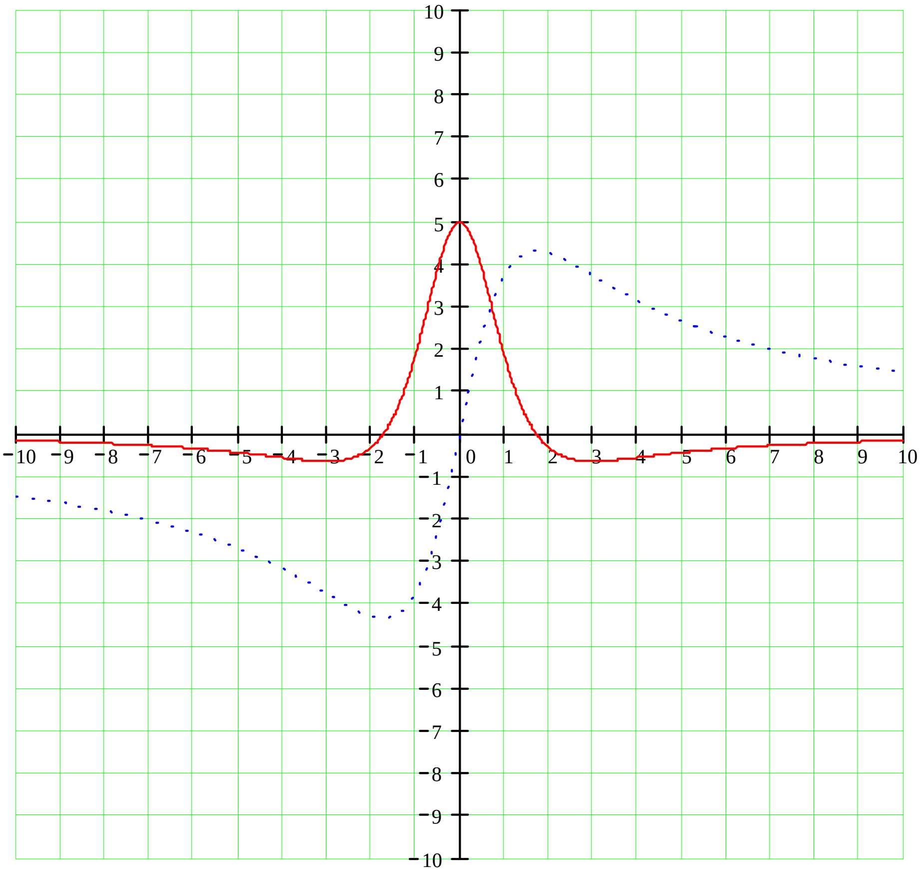
d) wegen der Monotonie hat G_f die zwei Tiefpunkte $T_1(-2/\sqrt{3})$ und $T_2(2/\sqrt{3})$.

2. a)



2. b) Der Graph der Ableitungsfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

2. c)



3. a) Radius r des Breitenkreises : $r = 6370\ \text{km} \cdot \cos(37{,}7^\circ) = 5040\ \text{km}$

$$\frac{\Delta\lambda}{360^\circ} = \frac{8488\,\text{km}}{2\pi\, 5040\,\text{km}} \;\Rightarrow\; \Delta\lambda = 96{,}5^\circ \;\Rightarrow$$

Sendai liegt $122{,}5^\circ + 96{,}5^\circ = 219^\circ$ westlich, d.h. 141° östl. Greenwich

Sendai (141° östl. / $37{,}7^\circ$ nördlich)

b) Tunnellänge x von San Francisco nach Sendai:

$$\frac{\frac{x}{2}}{r} = \sin\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) \;\Rightarrow\; x = 2 \cdot 5040\,\text{km} \cdot \sin\left(\frac{96{,}5^\circ}{2}\right) = 7520\,\text{km}$$

Für den Mittelpunktswinkel μ und den sphärischen Abstand d gilt

$$\sin\left(\frac{\mu}{2}\right) = \frac{x}{2 \cdot 6370\,\text{km}} \;\Rightarrow\; \mu = 72{,}35^\circ$$

$$d = \frac{\mu}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370\,\text{km} = 8044\,\text{km}$$

$$\frac{8488 - 8044}{8044} = 0{,}05519\ldots\ldots = 5{,}5\,\%$$

Der gesegelte Weg ist um 5,5 % länger als der sphärische Abstand.