K12 * LK Mathematik * 3. Klausur am 22.03.2001

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = (x^2 - a) \cdot e^{-x}$ mit $a \in R$.

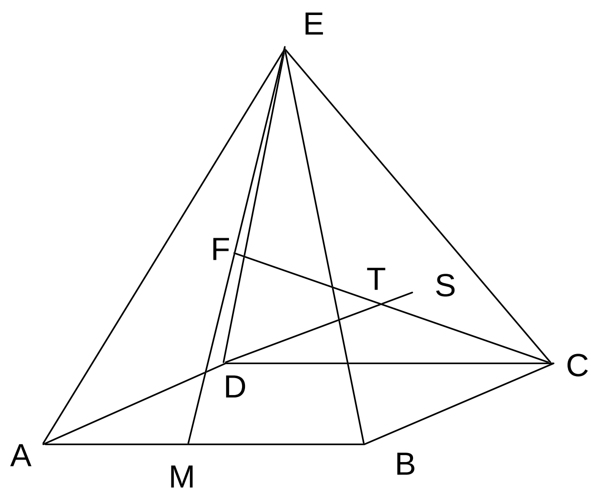
   a) Geben Sie den Definitionsbereich D_{f_a} an und bestimmen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs!
   b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a alle Nullstellen von f_a .
   c) Für welche Werte von a hat der Graph von f_a einen Tiefpunkt?
   Geben Sie die Stelle x_T an, an der sich der Tiefpunkt befindet!
   d) Zeigen Sie, dass $F_a(x) = -(x^2 + 2x + 2 - a) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f_a ist.

   Im Folgenden gelte a = 3.
   e) Skizzieren Sie sauber den Graphen der Funktion f_3 unter Berücksichtigung der durchgeführten Berechnungen!
   Begründen Sie kurz ohne Berechnung der zweiten Ableitung, dass der Graph von f_3 Wendepunkte besitzt!
   f) Der Graph von f_3 schließt mit der positiven x-Achse eine sich in das Unendliche erstreckende Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie A auf drei Dezimalstellen gerundet!

2. Im R^3 sind die drei Vektoren : $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   Für welche Werte von k
   erzeugen diese drei Vektoren einen Untervektorraum der Dimension 2 ?

3. Eine schiefe Pyramide ABCDE mit dem Parallelogramm ABCD als Grundfläche ist gegeben durch $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$.
   S ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCE, M halbiert [AB] und F halbiert [ME].
   a) Zeigen Sie $\overrightarrow{DS} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.
   b) Zeigen Sie mit Hilfe einer geeigneten Rechnung, dass sich die Geraden DS und CF in einem Punkt T schneiden. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [DS] ?



4. Die Polynome $p_1 = x^2 - 3x$, $p_2 = x + 1$ und $p_3 = x^2 + 3$ spannen im Vektorraum der Polynome (mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation) einen Untervektorraum U auf. Bestimmen Sie die Dimension dim(U) dieses Untervektorraums.

Gutes Gelingen! G.R.