1. Klausur im LK Mathematik, K12, 26.10.2000

1. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = 2 - x^2$ schließt mit der positiven x-Achse und mit der positiven y-Achse eine Fläche mit dem Inhalt A ein.

   a) Berechnen Sie A.

   b) A soll nun mit der Streifenmethode ermittelt werden.
   Bestimmen Sie für eine äquidistante Zerlegung den Wert der Ober- <u>oder</u> der Untersumme und bestätigen Sie damit geeignet das in 1a) errechnete Ergebnis.

2. a) Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion g und eine beliebige reelle Zahl a auch die Funktion $h(x) = \frac{a}{g(x)}$ differenzierbar ist und dass gilt
   $$h(x) = \frac{a}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{-a\,g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \text{mit } D_h = D_g \setminus \{\text{Nullstellen von } g\}$$

   b) Bestimmen Sie mit Hilfe von 2a) das unbestimmte Integral $\int \frac{4x}{(3x^2+2)^2}\,dx$.

   [Nicht korrektes Ersatzergebnis: $\int \frac{4x}{(3x^2+2)^2}\,dx = -\frac{5}{9x^2+6} + c$]

   c) Bestimmen Sie für f mit $f(x) = \frac{4x}{(3x^2+2)^2}$ <u>alle</u> die Stammfunktionen F_c, die gleichzeitig auch Integralfunktionen von f sind.
   Geben Sie also <u>alle</u> die Werte von c an, für die F_c Stammfunktion <u>und</u> Integralfunktion von f ist.

3. Geben Sie jeweils eine (möglichst einfache) Funktion f und reelle Zahlen a und b so an, dass gilt

   a) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ und $\int_a^b |f(x)|\,dx = 4$,

   b) $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ und $\int_a^b f(x)^2\,dx = 4$.

4. Gegeben sind die beiden Funktionenscharen $f_k(x) = \frac{x^2}{k^2}$ und $g_k(x) = \frac{1+k}{k^2} \cdot x$ mit dem Parameter $k > 0$.

   a) Zeichnen Sie die Graphen von f_k und g_k für $k = 1$ und (in anderer Farbe) für $k = 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   b) Die Graphen von f_k und g_k schließen für jedes $k > 0$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(k)$ ein. Berechnen Sie $A(k)$. [Ergebnis: $A(k) = \frac{(1+k)^3}{6k^2}$]

   c) Für welchen Wert von k wird der in 4b) berechnete Flächeninhalt extremal?
   Bestimmen Sie diesen Extremwert!
   Handelt es sich um ein Maximum oder um ein Minimum?

Gutes Gelingen! G.R.