

LK Mathematik * K13
Aufgaben zu Ebenenscharen im \mathbb{R}^3

1. Gegeben ist die Schar an Ebenen

$$E_k : kx_1 - 2kx_2 + x_3 = 4 \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

- a) Gibt es Punkte, die zu allen Ebenen der Schar gehören?
Geben Sie die Ebene E_k auch in einer geeigneten Punkt-Richtungs-Form an.
- b) Skizzieren Sie die Lage von E_0 und von E_k für $k \rightarrow \pm \infty$.
- c) Für welche Parameterwerte k gibt es ein \bar{k} mit $E_k \perp E_{\bar{k}}$?
Wie lautet der Zusammenhang zwischen k und \bar{k} ?
- d) Bestimmen Sie für jedes k die Spurgerade s_k von E_k mit der x_1x_2 -Ebene!
Welche Lage haben diese Spurgeraden zueinander?
- e) Bestimmen Sie für jedes k die Spurgerade t_k von E_k mit der x_1x_3 -Ebene!
Welche Lage haben diese Spurgeraden zueinander?
- f) Für welche Parameterwerte k gibt es ein \tilde{k} mit $t_k \perp t_{\tilde{k}}$?
Wie lautet der Zusammenhang zwischen k und \tilde{k} ?

2. Gegeben sind die Punkte $A(1/2/3)$, $B(3/0/3)$ und $C(k/2+k/4)$ mit $k \in \mathbb{R}$

und die Gerade $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Durch A , B und C ist eine Schar an Ebenen E_k festgelegt.
Geben Sie E_k in Punkt-Richtungs-Form und in Normalenform an.
- b) Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
- c) Gibt es Ebenen der Schar, die zur x_1x_2 -Ebene oder zur x_1x_3 -Ebene oder zur x_2x_3 -Ebene parallel liegen?
- d) Gibt es Geraden, die mit keiner Ebene der Schar gemeinsame Punkte haben?
- e) Gibt es eine Ebene der Schar, die mit der Geraden g keine gemeinsamen Punkte hat?
- f) Welche Punkte der Geraden g sind Schnittpunkte P_k von g mit den Ebenen E_k der Schar?
Welcher der Punkte P_k hat vom Ursprung den kleinsten Abstand?

G.R.