

**LK Mathematik \* K13**  
**Aufgaben zu Ebenenscharen im  $\mathbb{R}^3$**

1. Gegeben ist die Schar an Ebenen

$$E_k : kx_1 - 2kx_2 + x_3 = 4 \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

- a) Gibt es Punkte, die zu allen Ebenen der Schar gehören?  
Geben Sie die Ebene  $E_k$  auch in einer geeigneten Punkt-Richtungs-Form an.
- b) Skizzieren Sie die Lage von  $E_0$  und von  $E_k$  für  $k \rightarrow \pm \infty$ .
- c) Für welche Parameterwerte  $k$  gibt es ein  $\bar{k}$  mit  $E_k \perp E_{\bar{k}}$ ?  
Wie lautet der Zusammenhang zwischen  $k$  und  $\bar{k}$ ?
- d) Bestimmen Sie für jedes  $k$  die Spurgerade  $s_k$  von  $E_k$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene!  
Welche Lage haben diese Spurgeraden zueinander?
- e) Bestimmen Sie für jedes  $k$  die Spurgerade  $t_k$  von  $E_k$  mit der  $x_1x_3$ -Ebene!  
Welche Lage haben diese Spurgeraden zueinander?
- f) Für welche Parameterwerte  $k$  gibt es ein  $\tilde{k}$  mit  $t_k \perp t_{\tilde{k}}$ ?  
Wie lautet der Zusammenhang zwischen  $k$  und  $\tilde{k}$ ?

2. Gegeben sind die Punkte  $A(1/2/3)$ ,  $B(3/0/3)$  und  $C(k/2+k/4)$  mit  $k \in \mathbb{R}$

und die Gerade  $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Durch  $A$ ,  $B$  und  $C$  ist eine Schar an Ebenen  $E_k$  festgelegt.  
Geben Sie  $E_k$  in Punkt-Richtungs-Form und in Normalenform an.
- b) Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
- c) Gibt es Ebenen der Schar, die zur  $x_1x_2$ -Ebene oder zur  $x_1x_3$ -Ebene oder zur  $x_2x_3$ -Ebene parallel liegen?
- d) Gibt es Geraden, die mit keiner Ebene der Schar gemeinsame Punkte haben?
- e) Gibt es eine Ebene der Schar, die mit der Geraden  $g$  keine gemeinsamen Punkte hat?
- f) Welche Punkte der Geraden  $g$  sind Schnittpunkte  $P_k$  von  $g$  mit den Ebenen  $E_k$  der Schar?  
Welcher der Punkte  $P_k$  hat vom Ursprung den kleinsten Abstand?

G.R.