

Klausur im LK Mathematik * Stochastik

1. Eine äußerlich nicht erkennbare Krankheit K tritt in den zwei unterschiedlichen Varianten A und B auf. Die Variante A ist harmlos und bleibt unbehandelt, die Variante B dagegen führt zu ernsthaften Komplikationen und bedarf einer Behandlung.

Mit einem Test lässt sich die Krankheit K nachweisen, wobei dieser Test die beiden Varianten nicht zu unterscheiden vermag.

95% der an Variante A Erkrankten und 80% der an Variante B Erkrankten werden bei dem Test richtig erkannt.

In 1% der Fälle wird bei einem Gesunden die Krankheit K fälschlicherweise diagnostiziert.

Aus langjährigen Untersuchungen weiß man, dass etwa 2,0% der Bevölkerung die Krankheit K besitzt, wobei nur 10% der Erkrankten die Variante B in sich trägt.

- a) Der Test wird bei einer Reihenuntersuchung an einer großen Anzahl von Menschen durchgeführt. Mit welchem Prozentsatz an positiven Tests hat man zu rechnen?
- b) Herr Huber ist nach dem Testergebnis Träger der Krankheit K .
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Herr Huber
 - b1) an der Variante A erkrankt?
 - b2) an der Variante B erkrankt?
 - b3) nicht an K erkrankt?
- c) Frau Kunz ist nach dem Testergebnis gesund.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie trotzdem erkrankt?
- d) Begründen Sie mit einer Rechnung, dass bei der Untersuchung einer Person die Ereignisse $P :=$ "Test positiv" und $\bar{K} :=$ "Untersuchte Person gesund" stochastisch abhängig sind.
- e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 zufällig ausgewählten Personen genau eine an der Variante B und genau zwei an der Variante A erkrankt sind, die restlichen 97 Personen aber gesund sind?

2. Ein L-Würfel wird neu beschriftet. Er trägt je zweimal die Ziffern 0, 1 und 2.

Anton und Berta vereinbaren nun folgendes Spiel:

Anton zahlt 1,-DM Einsatz an Berta, wirft den Würfel dreimal und erhält dann von Berta das Produkt der geworfenen Ziffern in DM ausgezahlt.

$X :=$ "Reingewinn von Anton"

- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.
- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X . Warum ist das Spiel gerecht?
- c) Anton spielt das Spiel 10mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er genau zweimal den Maximalgewinn eines Spieles erhält?
- d) Wie oft muss Anton dieses Spiel durchführen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens einmal den Maximalgewinn bei einem Spiel erhält?
- e) Wie oft muss Anton das Spiel durchführen, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% der Mittelwert seines Reingewinnes vom erwarteten mittleren Reingewinn um weniger als 50 Pfennige unterscheidet? (Abschätzung mit "Tschebyschow"!)

Fortsetzung auf Seite 2!

3. Bei zwei äußerlich nicht unterscheidbaren Würfeln handelt es sich um einen L-Würfel und um einen "gezinkten" Würfel (kurz G-Würfel genannt).

Beim L-Würfel erscheint die "6" mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$, beim G-Würfel dagegen mit der Wahrscheinlichkeit 10 %.

- a) Beide Würfel werden je 100mal geworfen.

Welche Anzahl an "6" erwartet man durchschnittlich beim L- bzw. G-Würfel?

Wie groß ist beim L- bzw. G-Würfel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man genau 13mal eine "6" erhält?

Um die beiden Würfel unterscheiden zu lernen, wird der folgende Test durchgeführt:

Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und anschließend 100mal geworfen.

Falls die Anzahl der "6" hierbei größer als 13 ist, hält man diesen Würfel für den L-Würfel.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Entscheidungsregel

- b) der L-Würfel richtig erkannt?

- c) der G-Würfel fälschlich als L-Würfel bezeichnet?

Durch den Test wurde der erste geprüfte Würfel als L-Würfel eingestuft.

Zur Sicherheit wird nun auch noch der zweite Würfel einem Test unterzogen.

Er wird ebenfalls 100mal geworfen und nur dann als G-Würfel eingestuft,

wenn die Anzahl der "6" kleiner als 13 ist.

Ist die Anzahl der "6" dagegen größer als 12, so verwirft man die erste Entscheidung und erklärt den gesamten Test für gescheitert.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die beiden Würfel mit dem kombinierten Test

- d) richtig erkannt?

- e) gerade falsch eingestuft?

Gutes Gelingen! G.R