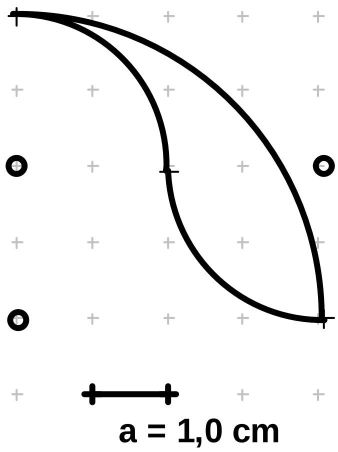
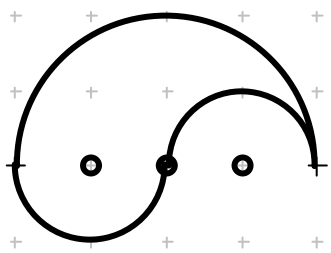
Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Radius

1. Alle abgebildeten Figuren bestehen aus Kreisbögen mit den Mittelpunktswinkeln 60^o, 90^o oder 120^o. Bestimme jeweils den Umfang der Figur. Verwende dabei die Näherung $\pi \approx 3{,}14$ und runde das Ergebnis jeweils auf Millimeter genau.
   Die „Kringel“ ∘ kennzeichnen Kreismittelpunkte.

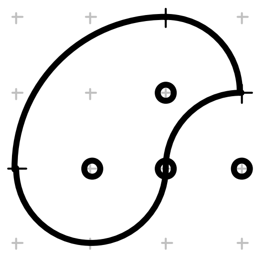
a)



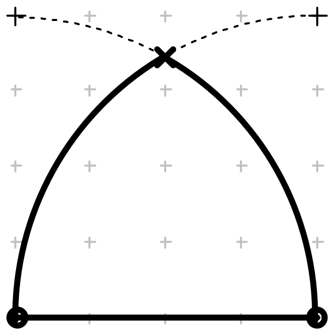
b)



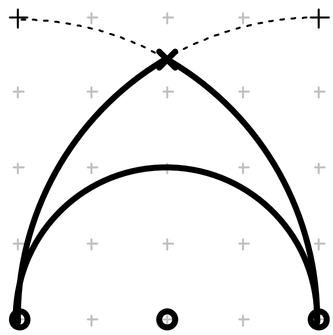
c)



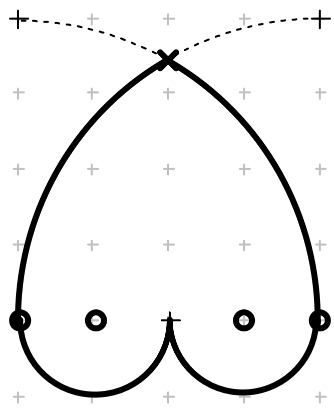
d)



e)

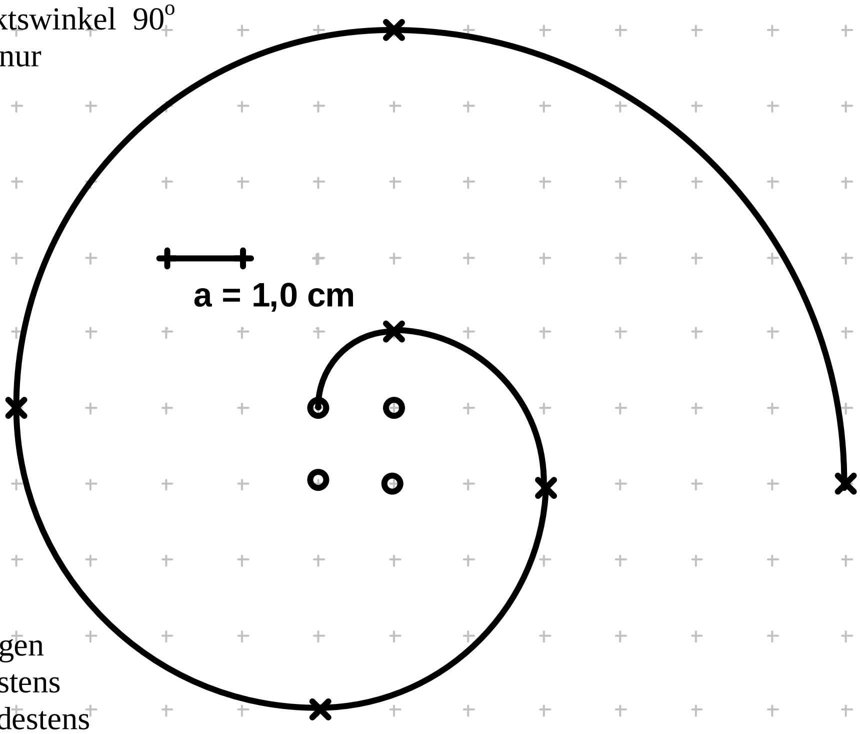


f)



2. Die abgebildete Spirale setzt sich jeweils aus Kreisbögen mit Mittelpunktswinkel 90^o zusammen. Dabei werden nur die vier eingetragenen Mittelpunkte benötigt.
   a) Wie lang ist die abgebildete Spirale, die aus 6 Kreisbögen zusammengesetzt ist?
   b) Man kann weitere Kreisbögen anfügen. Wie lang ist die Spirale, wenn sie aus insgesamt 12 Kreisbögen besteht?

   c) Für Experten:
   Aus wie vielen Kreisbögen muss die Spirale mindestens bestehen, wenn sie mindestens 10 Meter lang sein soll?



Lösungen zum Blatt „Zusammenhang zwischen Kreisumfang und Radius“

1. a) $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a = 4\cdot\pi\cdot a \approx 12{,}6\,\text{cm}$

   b) $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot a = 4\cdot\pi\cdot a \approx 12{,}6\,\text{cm}$

   c) $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot a = 3\cdot\pi\cdot a \approx 9{,}4\,\text{cm}$

   d) $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + 4a = \frac{8}{3}\cdot\pi\cdot a + 4a \approx 12{,}4\,\text{cm}$

   e) $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a = \frac{8}{3}\cdot\pi\cdot a + \pi\cdot 2a = \frac{14}{3}\cdot\pi\cdot a \approx 14{,}7\,\text{cm}$

   f) $\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot a + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\pi\cdot a = \frac{8}{3}\cdot\pi\cdot a + \pi\cdot 2a =$
   $\frac{14}{3}\cdot\pi\cdot a \approx 14{,}7\,\text{cm}$

2. a) $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 2a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 3a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 4a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 5a + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 6a =$
   $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a\right) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 21a = \frac{21}{2}\cdot\pi\cdot a \approx 33{,}0\text{cm}$

   b) $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(a + 2a + 3a + \ldots + 11a + 12a\right) = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 78a = 39\cdot\pi\cdot a \approx 122{,}5\text{cm}$

   c) Es muss gelten: $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot\left(a + 2a + 3a + \ldots + n\cdot a\right) \geq 10\text{m} = 1000\text{cm}$

   Das ist der Fall, falls $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) \geq 1000$ bzw.

   $\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) \geq \frac{2000}{\pi} \approx 637$ gilt.

   Diese Ungleichung ist erstmals für $n = 36$ erfüllt, denn

   $1 + 2 + 3 + \ldots + 34 + 35 = 630$ und $1 + 2 + 3 + \ldots + 35 + 36 = 666$.

   Nach 36 Viertelkreisbögen ist die Spirale insgesamt also länger als 10m.