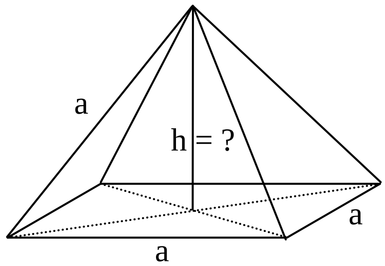
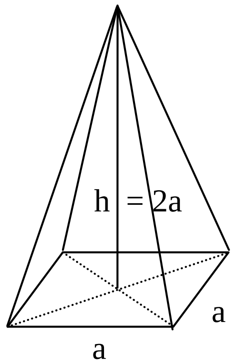
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Berechnungen an Pyramiden

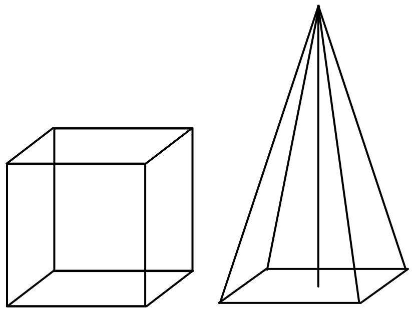
1. Das Bild zeigt eine gerade Pyramide mit einem Quadrat der Kantenlänge a als Grundfläche.
   Die Seitenkanten haben ebenfalls die Länge a.
   a) Zeichne ein Netz der Pyramide für a = 4cm!
   b) Berechne die Höhe h der Pyramide in Vielfachen von a !
   c) Berechne den Oberflächeninhalt S der Pyramide!



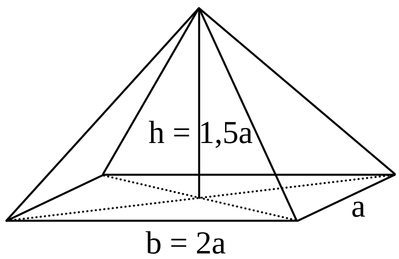
2. Das Bild zeigt eine gerade Pyramide mit einem Quadrat der Kantenlänge a als Grundfläche.
   Die Höhe der Pyramide ist 2a .
   a) Berechne die Länge der Seitenkanten in Vielfachen von a !
   b) Berechne den Oberflächeninhalt S der Pyramide in Vielfachen von a^2 !
   c) Bestimme a auf Millimeter genau, wenn der Oberflächeninhalt genau $400cm^2$ betragen soll.



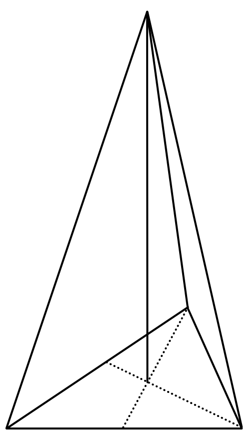
3. Ein Würfel und eine gerade Pyramide haben jeweils ein Quadrat der Kantenlange a als Grundfläche.
   Beide Körper sollen den gleichen Oberflächeninhalt haben.
   Wie lang müssen dann die Seitenkanten der Pyramide sein?
   Berechne auch die Höhe der Pyramide!



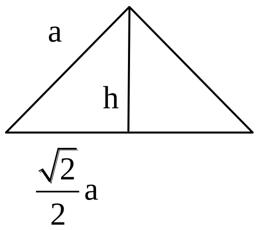
4. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b = 2a .
   Die Höhe der Pyramide beträgt h = 1,5a.
   Berechne die Seitenkantenlängen in Vielfachen von a.
   Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide in Vielfachen von a^2 .



5. Eine gerade Pyramide hat als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge a.
   Die Höhe der Pyramide beträgt 2a.
   Berechne die Seitenkantenlängen in Vielfachen von a.
   Berechne den Oberflächeninhalt der Pyramide in Vielfachen von a^2.



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Berechnungen an Pyramiden * Lösungen

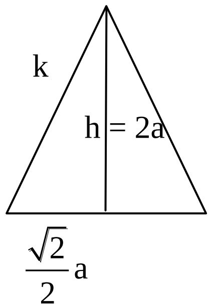


1. b) $h^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

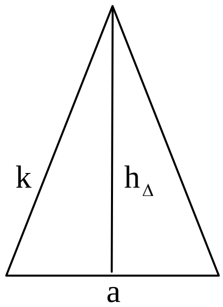
c) Die vier Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge a.

Die Höhe h_Δ darin beträgt $h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Eine Seitenfläche hat damit den Inhalt

$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ und es folgt $S = a^2 + 4 \cdot F_\Delta = a^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = (1 + \sqrt{3}) \cdot a^2$



2. a) $k^2 = (2a)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$



b) $k^2 = h_\Delta^2 + (\frac{a}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad h_\Delta^2 = \frac{9}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{17}{4}a^2$

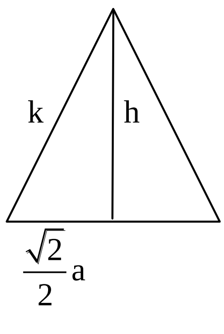
$h_\Delta = \frac{\sqrt{17}}{2}a$ und $F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_\Delta = \frac{\sqrt{17}}{4}a^2$ und damit

$S = a^2 + 4 \cdot F_\Delta = a^2 + \sqrt{17}\,a^2 = (1+\sqrt{17})\,a^2$

c) $S = 400\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow (1+\sqrt{17})\,a^2 = 400\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{400\,\text{cm}^2}}{\sqrt{1+\sqrt{17}}} = 8{,}836...\text{cm} \approx 8{,}8\text{cm}$

3. $6a^2 = a^2 + 4 \cdot F_\Delta \quad \Leftrightarrow \quad 5a^2 = 2 \cdot a \cdot h_\Delta \quad \Leftrightarrow \quad h_\Delta = \frac{5}{2}a$

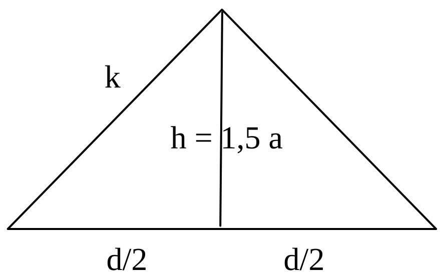
$k^2 = \frac{25}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\sqrt{26}}{2}a$ Bild wie bei Aufgabe 2b)



$k^2 = h^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{26}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{5}{2}a$

4. $d^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 \quad \Leftrightarrow \quad d = \sqrt{5}\,a$

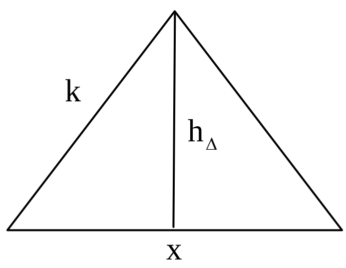
$k^2 = (\frac{3}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}d)^2 = \frac{14}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{\sqrt{14}}{2}a$



Grundfläche: $G = b \cdot a = 2a^2$

Oberfläche: $S = G + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_{\Delta 1} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_{\Delta 2} = 2a^2 + a\cdot h_{\Delta 1} + 2a\cdot h_{\Delta 2}$

$h_{\Delta 1}$ bzw. $h_{\Delta 2}$ sind die Höhen in den gleichschenkligen Dreiecken mit Basis $x = a$ bzw. $x = 2a$ und den Schenkeln k.



$k^2 = (h_{\Delta 1})^2 + (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow (h_{\Delta 1})^2 = \frac{14}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow h_{\Delta 1} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$

$k^2 = (h_{\Delta 2})^2 + (a)^2 \Rightarrow (h_{\Delta 2})^2 = \frac{14}{4}a^2 - a^2 \Rightarrow h_{\Delta 2} = \frac{\sqrt{10}}{2}a$

$S = 2a^2 + a\cdot h_{\Delta 1} + 2a\cdot h_{\Delta 2} = 2a^2 + \frac{\sqrt{13}}{2}a^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}a^2 = (2 + \frac{\sqrt{13}}{2} + \sqrt{10})a^2 \approx 6{,}97\,a^2$

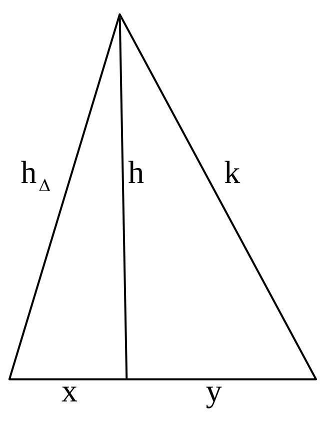
5. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck der Grundfläche hat die Länge $h_{gD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 1 : 2, d.h.

$x = \frac{1}{3}\cdot h_{gD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ und

$y = \frac{2}{3}\cdot h_{gD} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$h = 2a$



$k^2 = h^2 + y^2 \Leftrightarrow k^2 = (2a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2 \Leftrightarrow$

$k = \sqrt{\frac{13}{3}}\,a = \frac{\sqrt{39}}{3}a \approx 2{,}08\,a$

$h_\Delta{}^2 = h^2 + x^2 \Leftrightarrow h_\Delta{}^2 = (2a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2 \Leftrightarrow h_\Delta{}^2 = 4a^2 + \frac{1}{12}a^2 \Leftrightarrow h_\Delta{}^2 = \frac{49}{12}a^2$

$h_\Delta = \frac{7}{2\sqrt{3}}a = \frac{7\sqrt{3}}{6}a \approx 2{,}02\,a$

$S = \frac{1}{2}\cdot h_{gD}\cdot a + 3\cdot F_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{6}a^2 = \frac{8\sqrt{3}}{4}a^2 = 2\sqrt{3}\,a^2$