2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 9d, 05.04.2005

1. a) Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichung!

$$\frac{3x+1}{x-3}+\frac{1}{x}=1$$

   b) Bestimme zwei verschiedene Werte für k, so dass die Gleichung $x \cdot (k-2x) = 3k$ **keine** Lösung hat! (Rechnerische Begründung ist erforderlich!)

2. Die Strecke [AB] hat die Länge $\overline{AB}$ = 5,1cm.
T und S teilen diese Strecke [AB] innen und außen im gleichen Verhältnis 2 : 1.
Bestimme die Länge der Strecke [TS] .
(Fertige zuerst eine Skizze an, die die Lage der vier Punkte zueinander zeigt!)

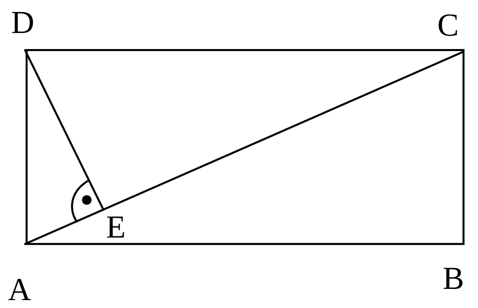
3. Im Rechteck ABCD ist E der Fußpunkt des Lots von D auf die Diagonale [AC].

   a) Begründe: $\overline{DE} \cdot \overline{CA} = \overline{BA} \cdot \overline{DA}$

   Es gelte nun $\overline{AB} = 6$ *und* $\overline{AD} = 2{,}5$

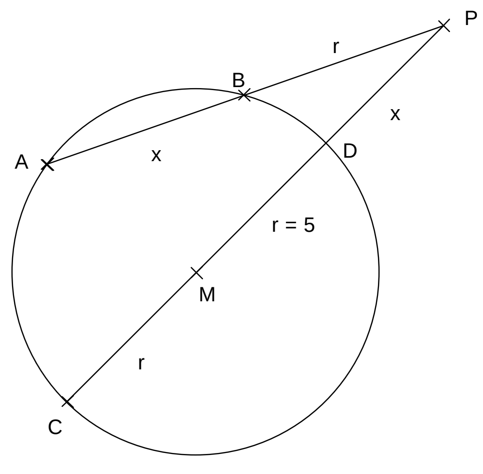
   b) Berechne $\overline{AC}$.

   c) Berechne $\overline{AE}$.



4. Zwei Sekanten des Kreises k(M ; r = 5) gehen durch den Punkt P.
Es gilt:
[CD] ist ein Durchmesser,
$\overline{AB} = \overline{DP} = x$ und $\overline{BP} = r$.

   Berechne die Länge x !
   Gib x zuerst exakt und dann auf Hundertstel gerundet an!



Aufgabe	1a	b	2	3a	b	c	4	Σ
Punkte	6	5	6	5	3	3	6	34

Gutes Gelingen! G.R.

Lösungen:

1.

a) $\dfrac{3x+1}{x-3} + \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \quad (3x+1)\cdot x + 1\cdot(x-3) = 1\cdot(x-3)\cdot x \quad \Leftrightarrow 3x^2 + x + x - 3 = x^2 - 3x \Leftrightarrow$

$2x^2 + 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \dfrac{1}{4}\cdot\left(-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}\right) = \dfrac{1}{4}\cdot\left(-5 \pm \sqrt{49}\right) = \dfrac{1}{4}\cdot(-5 \pm 7)$

$x_1 = -3 \quad ; \quad x_2 = 0{,}5$

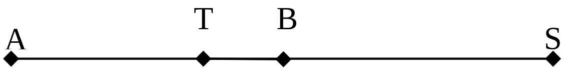
b) $x\cdot(k - 2x) = 3k \quad \Leftrightarrow \quad k\cdot x - 2x^2 = 3k \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - k\cdot x + 3k \quad mit \quad D = k^2 - 4\cdot 2\cdot 3k$

Diese quadratische Gleichung hat genau dann keine Lösung, wenn gilt $D < 0$.

$D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 24k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad k\cdot(k-24) < 0$

Für z.B. $k_1 = 1$ und $k_2 = 2$ gilt $D < 0$, d.h. für diese beiden Werte von k hat die ursprünglich gegebene Gleichung keine Lösung.

2. Lage der Punkte zueinander:



$\dfrac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \dfrac{2}{1} \quad und \quad \dfrac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \dfrac{2}{1} \quad \Rightarrow$

$\overline{BT} = \dfrac{1}{3}\overline{AB} \quad und \quad \overline{AS} = 2\overline{SB} \quad , d.h. \quad \overline{SB} = \overline{AB}$

$\overline{TS} = \overline{TB} + \overline{BS} = \dfrac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AB} = \dfrac{4}{3}\overline{AB} = \dfrac{4}{3}\cdot 5{,}1cm = 6{,}8cm$

3.

a) $\Delta ABC \sim \Delta DEA, \; denn \;\; \sphericalangle CBA = 90^0 = \sphericalangle DEA \quad und \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle EAD \;\; (Z-Winkel)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \quad \Rightarrow \quad \overline{CA}\cdot\overline{DE} = \overline{BA}\cdot\overline{DA} \quad q.e.d.$

b) Pythagoras: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 36 + 6{,}25 = 42{,}25 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$

c) Kathetensatz: $\overline{AD}^2 = \overline{AE}\cdot\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} = \dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}} = \dfrac{6{,}25}{6{,}5} = \dfrac{25}{26}$

4. Sekantensatz:

$\overline{AP}\cdot\overline{BP} = \overline{CP}\cdot\overline{DP} \quad \Leftrightarrow \quad (x+r)\cdot r = (2r+x)\cdot x \quad \Leftrightarrow \quad xr + r^2 = 2rx + x^2 \Leftrightarrow mit \; r = 5$

$5x + 25 = 10x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + 5x - 25 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-5 \pm \sqrt{25+100}\right)$

$x_{1/2} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-5 \pm 5\cdot\sqrt{5}\right) \;\; ; \quad x = \dfrac{5}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \approx 3{,}09 \quad (x_2 < 0 \;\; ist \; keine \; Lösung!)$