

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Laplace-Experimente (Wiederholung 8. Klasse)

Experimente, deren Ergebnis zufällig ist, nennt man **Zufallsexperimente**.

Beispiele: Wurf einer Münze, Wurf eines Würfels, Ziehung der Lottozahlen, ...

Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments fasst man zur so genannten **Ergebnismenge Ω** zusammen.

Beispiele: „Wurf einer Münze“ $\Omega = \{W, Z\}$ wobei gilt: W = Wappen, Z = Zahl

„Wurf eines Würfels“ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

„Wurf zweier Würfel“ $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), \dots (6,6)\}$

Für die Anzahl der Elemente einer Menge Ω schreibt man $|\Omega|$. („**Mächtigkeit**“ der Menge Ω)

Jede Teilmenge von Ω entspricht einem so genannten **Ereignis**. Ereignisse gibt man als Menge mit großen lateinischen Buchstaben (A, B, C, ... E_1, E_2, \dots) an:

Beispiel: „Wurf eines Würfels“ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A = {2, 4, 6} = „gerade Zahl“ B = {1, 3, 5} = „ungerade Zahl“

C = {2, 3, 5} = „Primzahl“ D = {4, 5, 6} = „Zahl größer als 3“

Besondere Ereignisse: $E_1 = \Omega =$ „**sicheres Ereignis**“ $E_2 = \{ \} =$ „**unmögliches Ereignis**“

$\bar{A} = \Omega \setminus A =$ „**Gegenereignis** zu A“

Das Ereignis E tritt ein, wenn das Ergebnis ω des Experiments ein Element von E ist.

Würfelt man also eine 4, so ist das Ereignis „gerade Zahl“ eingetreten, nicht aber „Primzahl“.

Mit Ereignissen kann man „rechnen“, man kann **Vereinigungsmengen $A \cup B$** und **Schnittmengen $C \cap D$** bilden.

Das Ereignis $A \cup B$ tritt ein, wenn das Ereignis A **oder** B eintritt.

Das Ereignis $C \cap D$ tritt ein, wenn das Ereignis A **und** B eintritt.

Führt man ein Zufallsexperiment (z.B. „Wurf eines Würfels“) **n-mal** durch und tritt dabei das

Ergebnis A genau **k-mal** auf, so heißt $\frac{k}{n}$ die **relative Häufigkeit** dieses Ergebnisses.

Je größer n ist, um so weniger schwankt die relative Häufigkeit um einen festen Zahlenwert. Man spricht dabei vom so genannten „**Gesetz der großen Zahlen**“.

Beispiel: „n-maliger Wurf eines Würfels“

n = 100

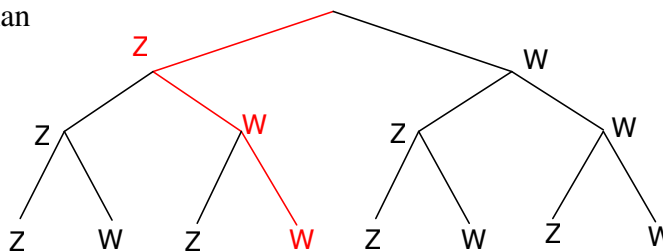
Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Würfe	17	15	21	20	11	16
Relative Häufigkeit	17%	15%	21%	20%	11%	16%

n = 10000

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Würfe	1666	1650	1647	1720	1678	1639
Relative Häufigkeit	16,7%	16,5%	16,5%	17,2%	16,8%	16,4%

Mit einem **Baumdiagramm** kann man viele Zufallsexperimente übersichtlich darstellen.

Beispiel:
3-maliger Wurf
einer Münze:



$\Omega = \{ZZZ, ZZW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW, WWZ, WWW\}$

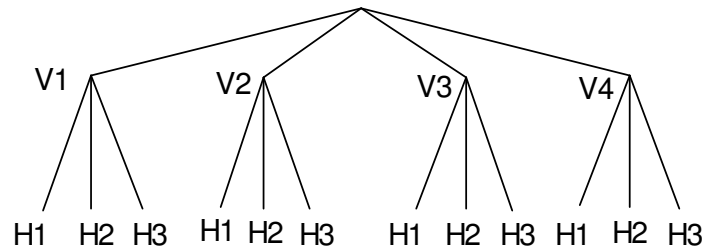
Zu jedem Ergebnis gehört ein so genannter Pfad des Baumdiagramms.

Mit **Baumdiagrammen** oder allgemeiner nach dem so genannten **Zählprinzip** lässt sich die Gesamtzahl an Möglichkeiten ermitteln.

Beispiel:

Ein Restaurant bietet für das Mittagsmenü 4 Vorspeisen und 3 Hauptgerichte an.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Zusammenstellung?



Es sind $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten.

Anwendung des Zählprinzips:

Auf wie viele Möglichkeiten kann man 5 verschiedene Buchstaben (zu einem Wort) anordnen?

Lösung: Das ist auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Arten möglich.

Für $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ schreibt man auch **5!** („**5 Fakultät**“)

Mit dem Taschenrechner kannst Du Fakultäten schnell berechnen.

Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist.

Dementsprechend nennt man einen Würfel, bei dem jede Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt, einen **idealen** bzw. einen **Laplace-Würfel** oder kurz **L-Würfel**.

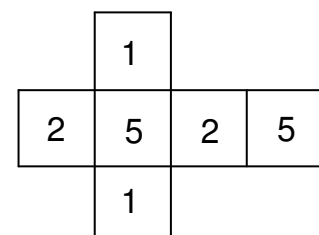
Bei Laplace-Experimenten gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Aufgaben:

- In einer Urne befinden sich 10 Lose. 6 davon sind Nieten, drei der restlichen liefern einen Gewinn von 1 € und ein Los bringt den Hauptgewinn von 5 €.
 - Hans zieht ein Los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
 $A =$ „Hans zieht eine Niete“ $B =$ „Hans erhält mindestens 1 €“ $C = \bar{A}$
 - Hans zieht zwei Lose (natürlich ohne Zurücklegen des ersten Loses).
 Wie groß sind nun die Wahrscheinlichkeiten für
 $A =$ „Hans zieht nur Nieten“ $B =$ „Hans erhält mindestens einen Gewinn“
 $C =$ „Hans hat genau 2 € Gewinn“ $D =$ „Hans gewinnt 5 €“
- Wie viele verschiedenen (auch unsinnigen) Wörter kann man mit den Buchstaben des Wortes „EUROPA“ bzw. „MUENCHEN“ bzw. „SOMMERFERIEN“ schreiben?

- Petra wirft den Würfel mit dem abgebildeten Netz zweimal.
 Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Wahrscheinlichkeiten für
 $A =$ „Mindestens eine 2“ $B =$ „Augensumme > 4 “
 $C =$ „Augendifferenz > 2 “ $D =$ „Keine 5“



- Eine Laplace-Münze wird 5-mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.
 $A =$ „Genau 4-mal Wappen“ $B =$ „Mindestens 2-mal Wappen“