Quadratische Gleichungen für die Klasse 9d

Die meisten der folgenden Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen.
Bestimme jeweils die Lösungsmenge!
(Bei zwei Gleichungen sieht man die Lösungen ohne lange Rechnung!)

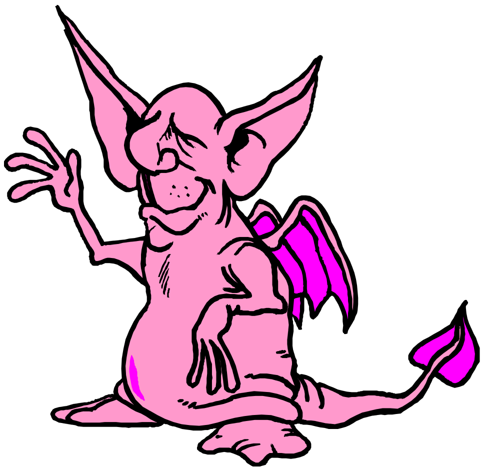
Gib die Lösungen zuerst exakt und – falls sie irrational sind – mit dem Taschenrechner auf Hundertstel gerundet an.

Beachte:

Forme erst in die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ um und wende dann gegebenenfalls die

Mitternachtsformel an: $x_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \right)$

1. $2x^2 - 5 = x$
2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x$
3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32$
4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2$
5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2$
6. $\frac{1}{x} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x}$
7. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 0$
8. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 6$
9. $x^4 - x^2 = 12$
10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0$
12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5$



Lösungen:

1. $2x^2 - 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1+40}\right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$

   $x_1 \approx 1{,}85 \;;\; x_2 \approx -1{,}35$

2. $\left(2x-3\right)^2 - 4 = 5x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 12x + 9 - 4 - 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 17x + 5 = 0$

   $x_{1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left(17 \pm \sqrt{209}\right) \;;\; x_1 \approx 3{,}93 \;;\; x_2 \approx 0{,}32$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32 \;\Big|\cdot 6x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 9 = 192x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 192x - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow$

   $x_{1/2} = \frac{1}{8} \cdot \left(192 \pm \sqrt{37008}\right) = 24 \pm \frac{3}{2} \cdot \sqrt{257} \;;\; x_1 \approx 48{,}05 \;;\; x_2 \approx -0{,}05$

4. $\left(x-3\right)^2 - \left(x-3\right) = \left(x+3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 12 = x^2 + 6x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 13x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{13}$

   Dies ist keine quadratische Gleichung!

5. $2x^2 + 3x + 4 = \left(x+2\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \;;\; x_2 = 1$

6. $\frac{1}{x} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x} \;\Big|\cdot 3x \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2x = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4{,}5 \quad$ (*keine quadratische Gleichung*!)

7. $\left(2x-3\right) \cdot \left(4x+5\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3 = 0 \; oder \; 4x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1{,}5 \;;\; x_2 = -1{,}25$

8. $\left(2x-3\right) \cdot \left(4x+5\right) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2 - 2x - 15 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^2 - 2x - 21 = 0 \quad \Leftrightarrow$

   $x_{1/2} = \frac{1}{16} \cdot \left(2 \pm \sqrt{676}\right) = \frac{1}{8} \cdot (1 \pm 13) \;;\; x_1 = 1{,}75 \;;\; x_2 = -1{,}5$

9. $x^4 - x^2 = 12 \; mit \; u = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - u - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(u-4\right) \cdot \left(u+3\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 4 \,;\, u_2 = -3$

   $x^2 = 4 \quad hat \; die \; Lösungen \; x_{1/2} = \pm 2 \;;\; x^2 = -3 \; hat \; keine \; Lösung!$

10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \; mit \; x^2 = u \quad \Leftrightarrow \quad 2u^2 - 3u - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \pm \sqrt{41}\right)$

    nur zu $u_1 > 0$ gibt es für $x^2 = u$ Lösungen: $x_{1/2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{41}} \approx \pm 1{,}53$

11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \left(4x^2 - \sqrt{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}59$

    Das ist keine quadratische Gleichung sondern eine Gleichung dritten Grades (wegen x^3)!

12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5 \;\Big|\cdot (2+x) \cdot (4-x) \quad \Leftrightarrow \quad (4-x) - 3 \cdot (2+x) = 5 \cdot \left(8 + 2x - x^2\right) \quad \Leftrightarrow$

    $x^2 - 14x - 42 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(14 \pm \sqrt{364}\right) = 7 \pm \sqrt{91} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \approx 16{,}54 \,;\, x_2 \approx -2{,}54$