Anwendungen der Exponentialfunktion * Jahrgangsstufe 10

Zinsrechnung:

$K(t)$ Kapital zum Zeitpunkt t
K_o Ausgangskapital
p Zinssatz

$$K(t) = K_o \cdot (1+p)^{\frac{t}{1a}}$$

Wachstumsfunktion:

$N(t)$ Anzahl (Menge) zum Zeitpunkt t
N_o Ausgangszahl (bzw. -menge)
T_2 Verdopplungszeit, d.h. in einer Zeitspanne von T_2 verdoppelt sich jeweils N

$$N(t) = N_o \cdot 2^{\frac{t}{T_2}}$$

Zerfallsgesetz (negative Wachstumsfunktion):

$N(t)$ Anzahl (Menge) zum Zeitpunkt t
N_o Ausgangszahl (bzw. -menge)
$T_{1/2}$ Halbwertszeitzeit, d.h. in einer Zeitspanne von $T_{1/2}$ halbiert sich jeweils N

$$N(t) = N_o \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass man die Formel zur Zinsrechnung auch als Wachstumsfunktion schreiben kann!

2. a) Anton legt sein Geld zu einem Zinssatz von 4,5 % an.
   Wie lange muss er warten, bis sich sein Geld verdoppelt (verzehnfacht, verzwanzigfacht) hat?
   b) Berta legt ihr Geld zu einem Zinssatz von 6,0 % an.
   Um wie viel Prozent vergrößert sich ihr Kapital in 10 Jahren (20 Jahren) ?
   c) Claus möchte, dass sich sein Geld in 10 Jahren verdoppelt. Mit welchem Zinssatz muss er sein Geld anlegen?
   d) Dora möchte, dass sich ihr Geld in 20 Jahren verdreifacht. Mit welchem Zinssatz muss sie ihr Geld anlegen? Um wie viel Prozent hat sich ihr Kapital in den ersten 10 Jahren vermehrt?

3. Auf der Erde lebten 1930 etwa $2{,}015 \cdot 10^9$ und 1960 etwa $3{,}010 \cdot 10^9$ Menschen.
   a) Bestimmen Sie aus diesen Angaben das Wachstumsgesetz für die Menschen.
   $N(x) = ?$ x soll dabei die Jahreszahl sein, $N(x)$ die Anzahl der Menschen im Jahre x.
   b) Wie viele Menschen hätten demnach 1950 gelebt?
   Eine solche Berechnung heißt Interpolation. (Tatsächlicher Wert: $2{,}509 \cdot 10^9$)
   c) Wie viele Menschen hätten demnach 1975 gelebt?
   Eine solche Berechnung heit Extrapolation. (Tatsächlicher Wert: $3{,}967 \cdot 10^9$)
   d) In welchem Zeitraum verdoppelt sich nach diesem Wachstumsgesetz jeweils die Menschheit?
   e) Welche Werte liefert die (sehr gewagte) Extrapolation auf die Jahre 0, 2050 bzw. 5000 ?
   f) Wann haben nach unserem Modell zwei Menschen (Adam und Eva?), 2,00 Milliarden Menschen bzw. 6,00 Milliarden Menschen gelebt?

4. Uran 238 hat eine Halbwertszeit von $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahren.
   a) Wie viel Prozent einer Uranmenge sind nach 10^{10}, 10^9, 10^6 und 10^3 Jahren noch vorhanden?
   b) Wie lange dauert es, bis 90 % einer Uranmenge zerfallen sind?
   c) Wie viele Uranatome sind in 1,0 Gramm Uran enthalten (eine atomare Masseneinheit hat den Wert $u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg) ?
   Knobelaufgabe: Wie viele Atomekerne zerfallen davon in einer Sekunde?

5. Cäsium 137 hat eine Halbwertszeit von 32 Jahren. Der Erdradius beträgt 6370 km.
   Nehmen wir an, dass 100g Cäsium 137 gleichmäßig über die gesamte Erde verteilt werden.
   Kann man dann mit einem Geiger-Müller-Zählrohr diese weit verteilte Cs-Menge nachweisen?
   Folgende Rechnung soll bei der Beantwortung dieser Frage helfen.
   a) Wie viele Cs-Atome befinden sich dann auf einem Quadratmeter?
   b) Wie viele Cs-Kerne zerfallen dann pro Quadratmeter und pro Sekunde?

6. Harte ß-Strahlen werden zu 80 % in einer 1,0 mm dicken Aluminiumschicht absorbiert.
   a) Stellen Sie für diesen Vorgang ein Absorptionsgesetz auf (negative Wachstumsfunktion).
      Bei welcher Schichtdicke werden 50 % absorbiert?
   b) Bei welcher Schichtdicke dringt noch 1,0 % durch?
   c) Welcher Anteil der Strahlung wird von einer 0,50 mm starken Alufolie verschluckt?